

Variabili casuali

3.1. Introduzione

Introducendo il concetto di probabilità si è fatto riferimento a fenomeni aleatori i cui risultati o eventi possono essere rappresentati da un certo insieme, finito o infinito, di elementi distinti che costituiscono lo spazio campionario Ω . Ogni prova o esperimento si risolve nella estrazione di un elemento che appartiene ad Ω . Prima di effettuare la prova si sa che essa può dare luogo ad uno qualunque dei risultati di Ω , ciascuno con la probabilità corrispondente, e la somma di tutte queste probabilità deve essere uguale all'unità.

I problemi che si debbono affrontare nel mondo reale risulteranno molto più semplificati se invece di parlare di eventi si fa riferimento a funzioni a valori reali, definite a partire dagli eventi stessi. Infatti i risultati di un esperimento possono essere del tipo più disparato: numeri, attributi, caratteristiche, ecc.; per poter trattare matematicamente tali risultati sarà necessario associare ad essi dei numeri reali.

Così, tanto per fare un esempio, invece di dare un giudizio qualitativo sullo stato di salute di una persona, si possono dare elementi quantitativi che esprimono tale concetto in modo più rigoroso, come la sua temperatura corporea, il suo peso, il tasso di certe sostanze nel sangue, ecc. Ancora, per il lancio di un nuovo prodotto sul mercato, i risultati possono essere determinati dalla quantità venduta in un certo periodo, ecc.

Definire una variabile casuale (v.c.) significa quindi trovare una regola in base alla quale associare un numero reale ad ogni risultato di un esperimento e quindi ad ogni elemento dello spazio campionario Ω . Naturalmente per uno stesso spazio Ω sarà possibile definire più di una regola e quindi più di una variabile casuale; la regola che si sceglierà sarà quella che permetterà di generare la variabile casuale che riflette l'informazione più rilevante per il

problema che si vuole risolvere.

Si possono costruire diversi tipi di v.c.: il numero dei valori assunti può essere finito, infinito, numerabile o non numerabile; i valori possono essere distribuiti in modo discreto o continuo.

Definizione: Una v.c. X è una variabile che assume valori nello spazio dei numeri reali secondo una funzione di probabilità $P(X)$.

I valori di una v.c. sono numeri reali determinati dal risultato di un esperimento, e quindi incerti; di conseguenza una variabile casuale X è sempre accompagnata dalla sua funzione di probabilità $P(X)$ la quale esprime, per l'appunto, la probabilità con la quale la variabile X può assumere i suoi diversi valori (figura 3.1).

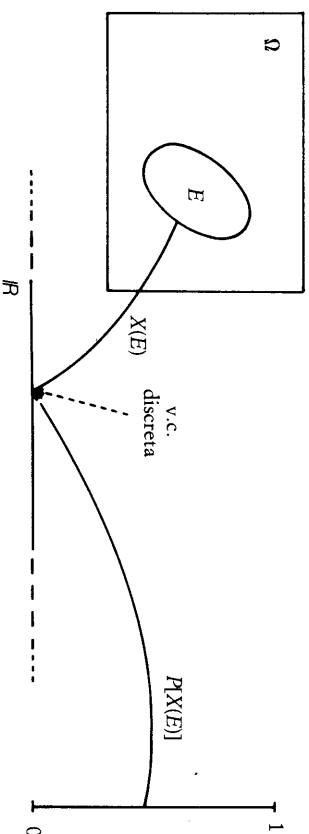


Fig. 3.1. Rappresentazione grafica dello schema di costruzione di una v.c. discreta.

Quindi una variabile casuale è una grandezza che deve sempre essere accompagnata da una distribuzione di probabilità. Questa è la caratteristica peculiare che la differenzia dalle altre variabili.

Infatti:

- a) una variabile in senso matematico è una grandezza che può assumere diversi valori a prescindere dalla frequenza con la quale tali valori possono essere assunti;
- b) una variabile statistica è una grandezza che deriva dalla classificazione di dati rilevati, cioè viene definita in modo empirico, una volta conosciuti i dati ed averli classificati.

Nota: Utilizzando un linguaggio più formalizzato si dirà che una variabile casuale X è un'applicazione di Ω in $\mathbb{R}$, cioè $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; la distribuzione di probabilità di una v.c. è un'applicazione di $\mathbb{R}$ nell'intervallo $[0, 1]$ definita per ogni $X \in \mathbb{R}$, cioè $P(X): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$.

Le funzioni di probabilità $P(X)$ e $P(E)$, per $X \in \mathbb{R}$ e $E \subset \Omega$, sono due funzioni diverse, ma si può passare dall'una all'altra mediante una trasformazione biunivoca.

3.2. Variabili casuali discrete

In un primo momento, per semplicità di esposizione, si farà riferimento ad uno spazio campionario Ω finito munito di una funzione di probabilità P , cioè a quegli esperimenti che possono dar luogo ad un numero finito o ad un'infinità numerabile di risultati alternativi.

Le fasi attraverso le quali si arriverà ad associare ai risultati possibili, compresi in Ω , dei numeri reali e le rispettive probabilità sono le due seguenti:

- 1) Ad ogni evento $E \subset \Omega$ si associa uno ed un solo numero reale $X(E)$. Questa operazione definisce una variabile X .
- 2) Ad ogni possibile valore della variabile $X(\cdot)$ si associa una probabilità $P(X)$. Questa operazione definisce la distribuzione di probabilità della variabile X .

Esempio: Si considera un esperimento consistente nel lancio di 3 monete. Vi sono diverse variabili casuali, o regole, che permettono di assegnare un valore numerico ad ogni risultato dell'esperimento. Così, per esempio, si può considerare $X =$ «numero di teste uscite». I possibili valori di X saranno 0, 1, 2 e 3. Se si sceglie la v.c. X significa che si è interessati al numero complessivo di teste nelle tre monete. Se invece si è interessati al numero di croci uscite, si sceglie la regola $Y =$ «numero di croci uscite», ed Y assumerà pure i valori 0, 1, 2 e 3. Se invece si fosse interessati al numero di coppie consecutive di teste si definisce la variabile $Z =$ «numero di coppie consecutive di teste», e la v.c. Z assumerà i valori 0, 1, e 2, come si può vedere dalla tabella 3.1.

Si potrebbe inoltre immaginare una situazione nella quale si vince 2 per ogni testa e si paga 1 per ogni croce, quindi si definisce la v.c. $W =$ «guadagno netto nel lancio di 3 monete» e W assumerà i valori 6, 3, 0, -3.

Tab. 3.1. Valori di variabili casuali associate all'esperimento

Risultati	X	Y	Z	W	Probabilità
TTT	3	0	2	6	1/8
TTC	2	1	1	3	1/8
TCT	2	1	0	3	1/8
CTT	2	1	1	3	1/8
TCC	1	2	0	0	1/8
CTC	1	2	0	0	1/8
CCT	1	2	0	0	1/8
CCC	0	3	0	-3	1/8

La scelta di quale regola adottare è arbitraria e dovrà essere fatta sulla base dell'informazione che tale v.c. è capace di fornire per il problema che si vuole risolvere.

La v.c. X , «numero di teste uscite», può assumere i valori 0, 1, 2, 3. Tutta l'informazione relativa al numero di teste uscite in un lancio di 3 monete e le rispettive probabilità è riassunta nella v.c. X rappresentata nella tabella 3.2.

Tab. 3.2. Distribuzione di probabilità per la v.c. X

Valori possibili di X	Probabilità di ogni X , $P(X)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1

La v.c. X è una v.c. di tipo discreto come la sua distribuzione di probabilità di cui si può dare una rappresentazione grafica (figura 3.2).

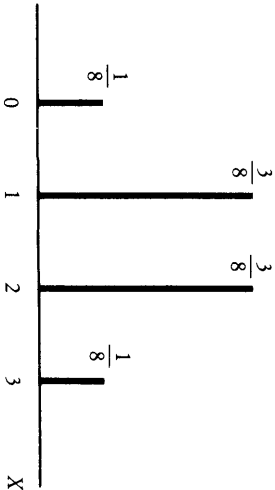


Fig. 3.2. Rappresentazione grafica della distribuzione di probabilità del numero di teste uscite nel lancio di 3 monete.

Le distribuzioni di probabilità delle v.c. Y , Z e W sono riportate nella tabella 3.3 seguente e le loro rappresentazioni grafiche nelle figure 3.3, 3.4 e 3.5.

Tab. 3.3. Distribuzioni delle v.c. Y , Z e W

Y	P(Y)	Z	P(Z)	W	P(W)
0	1/8	0	5/8	-3	1/8
1	3/8	1	2/8	0	3/8
2	3/8	2	1/8	3	3/8
3	1/8			6	1/8

Nelle rappresentazioni grafiche precedenti le linee verticali hanno una lunghezza che è proporzionale alla probabilità dei diversi valori delle v.c.

Nel seguito sarà necessario distinguere una variabile casuale X , nella sua espressione generale, da uno qualunque dei valori che essa può assumere; si utilizzerà la lettera minuscola x per indicare una realizzazione di X .

Inoltre, invece di specificare le singole probabilità $P(x)$ per i valori che può assumere la v.c. X , quando è possibile si preferisce esprimere la relazione funzionale che lega queste probabilità, che viene sintetizzata per mezzo della funzione $f(x)$; l'impiego della funzione di probabilità $f(x)$ sarà indispensabile quando si ha a che fare con v.c. di tipo continuo o v.c. discrete che possono assumere un numero molto elevato di valori. La funzione $f(x)$ verrà impiegata per indicare la probabilità con cui la variabile casuale X può assumere il valore x , e ciò per sottolineare che la probabilità è una funzione $f(\cdot)$ il cui valore dipende da x , cioè $f(x) = P(X=x)$.

Definizione: La variabile X è una v.c. discreta se assume un numero finito o un'infinità numerabile di valori $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ con probabilità rispettivamente $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$

La funzione discreta $f(x)$ definisce la *funzione di probabilità* della v.c. X . Essendo X una v.c. discreta, la corrispondente funzione di probabilità sarà anch'essa discreta, nel senso che concentra la probabilità in un numero finito o in un'infinità numerabile di valori di X . La funzione di probabilità $f(x)$ di tipo discreto soddisfa le seguenti condizioni:

1) $f(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.