

$$P(X > a) = 1 - F_X(a) \quad (2.11)$$

$$P(X < b) = F_X(b^-) \quad \text{con} \quad b^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} b - \epsilon \quad (2.12)$$

## 2.4 VARIABILI CASUALI DISCRETE E FUNZIONI DI PROBABILITÀ

### Definizione

Sia  $X$  una v.c. con f.r.  $F_X(x)$ . Se  $F_X(x)$  cambia valore soltanto in corrispondenza dei salti (che sono al più un'infinità numerabile) ed è costante altrove – ossia se  $F_X(x)$  è una funzione “a gradini” (si veda la Figura 2.3) – allora  $X$  viene chiamata *variabile casuale discreta*. In alternativa,  $X$  è una v.c. discreta soltanto se il suo campo di variazione contiene un numero finito o un'infinità numerabile di punti. La v.c.  $X$  nell'Esempio 2.3 è un esempio di v.c. discreta.

### Funzione di probabilità

Si supponga che i salti di  $F_X(x)$  di una v.c. discreta  $X$  si verifichino ai punti  $x_1, x_2, \dots$ , dove la sequenza può essere finita o infinita e assumiamo  $x_i < x_j$  se  $i < j$ .

$$\text{Quindi} \quad F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}) = P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1}) = P(X = x_i) \quad (2.13)$$

$$\text{Sia} \quad p_X(x) = P(X = x) \quad (2.14)$$

La funzione  $p_X(x)$  è detta *funzione di probabilità* della v.c. discreta  $X$ .

### Proprietà di $p_X(x)$

$$1. \quad 0 \leq p_X(x_k) \leq 1 \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

$$2. \quad p_X(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \neq x_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.16)$$

$$3. \quad \sum_k p_X(x_k) = 1 \quad (2.17)$$

La f.r.  $F_X(x)$  di una v.c. discreta  $X$  può essere ottenuta dalla sua f.p. mediante

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_X(x_k) \quad (2.18)$$

## 2.5 VARIABILI CASUALI CONTINUE E FUNZIONI DI DENSITÀ

### Definizione

Sia  $X$  una v.c. con f.r.  $F_X(x)$ . Se  $F_X(x)$  è continua e la sua derivata  $dF_X(x)/dx$  esiste ovunque (tranne al più in un numero di punti finito) ed è continua a tratti,  $X$  viene chiamata *variabile casuale continua*. In alternativa  $X$  è una v.c. continua soltanto se il suo campo di variazione contiene un intervallo (finito o infinito) di numeri reali. Pertanto, se  $X$  è una v.c. continua, vale (Problema 2.18)

$$P(X = x) = 0 \quad (2.19)$$

Si noti che questo evento con probabilità 0 non è necessariamente l'evento impossibile  $\emptyset$ .

Nella maggior parte delle applicazioni, la v.c. è o discreta o continua. Se invece la f.r.  $F_X(x)$  di una v.c.  $X$  possiede caratteristiche sia delle v.c. discrete sia di quelle continue, la v.c.  $X$  viene chiamata *variabile casuale mista* (Problema 2.10).

### Funzioni di densità

$$\text{Sia} \quad f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.20)$$

La funzione  $f_X(x)$  viene chiamata *funzione di densità* (f.d.) della v.c. continua  $X$ .

### Proprietà di $f_X(x)$

$$1. f_X(x) \geq 0 \quad (2.21)$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.22)$$

3.  $f_X(x)$  è continua a tratti

$$4. P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (2.23)$$

La f.r.  $F_X(x)$  di una v.c. continua  $X$  può essere ottenuta dalla sua f.d. mediante

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi \quad (2.24)$$

Dalla (2.19), se  $X$  è una v.c. continua, si avrà

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a) \end{aligned} \quad (2.25)$$

## 2.6 MEDIA E VARIANZA

### Media

La *media* (o *valore atteso*) di una v.c.  $X$ , indicata con  $\mu_X$  o  $E(X)$ , è definita da

$$\mu_X = E(X) = \begin{cases} \sum_k x_k p_X(x_k) & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & X \text{ continua} \end{cases} \quad (2.26)$$

### Momento

Il *momento  $n$ -esimo* di una v.c.  $X$  è definito mediante

$$E(X^n) = \begin{cases} \sum_k x_k^n p_X(x_k) & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx & X \text{ continua} \end{cases} \quad (2.27)$$

Si noti che la media di  $X$  corrisponde al momento primo di  $X$ .

### Varianza

La *varianza* di una v.c.  $X$ , indicata con  $\sigma_X^2$  o  $\text{Var}(X)$ , è definita da

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\} \quad (2.28)$$

Pertanto

$$\sigma_X^2 = \begin{cases} \sum_k (x_k - \mu_X)^2 p_X(x_k) & X \text{ discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x_k - \mu_X)^2 f_X(x_k) dx & X \text{ continua} \end{cases} \quad (2.29)$$

Si noti dalla definizione (2.28) che

$$\text{Var}(X) \geq 0 \quad (2.30)$$

Lo *sclarto quadratico medio* di una v.c.  $X$ , indicata con  $\sigma_X$ , è la radice quadrata positiva di  $\text{Var}(X)$ . Sviluppando il membro di destra della (2.28), si può ottenere la seguente relazione:

$$\text{Var}(X) = E(X)^2 - [E(X)]^2 \quad (2.31)$$

che è una formula utile per determinare la varianza.

## 2.7 ALCUNE DISTRIBUZIONI NOTEVOLI

In questo paragrafo presentiamo alcune importanti distribuzioni.

### Distribuzione di Bernoulli

Una v.c.  $X$  viene chiamata *variabile casuale di Bernoulli* con parametro  $p$  se la sua f.p. è data da

$$p_X(k) = P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} \quad k = 0, 1 \quad (2.32)$$

con  $0 \leq p \leq 1$ . Dalla (2.18), la f.r.  $F_X(x)$  della v.c.  $X$  di Bernoulli è data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

La Figura 2.4 illustra una distribuzione di Bernoulli.

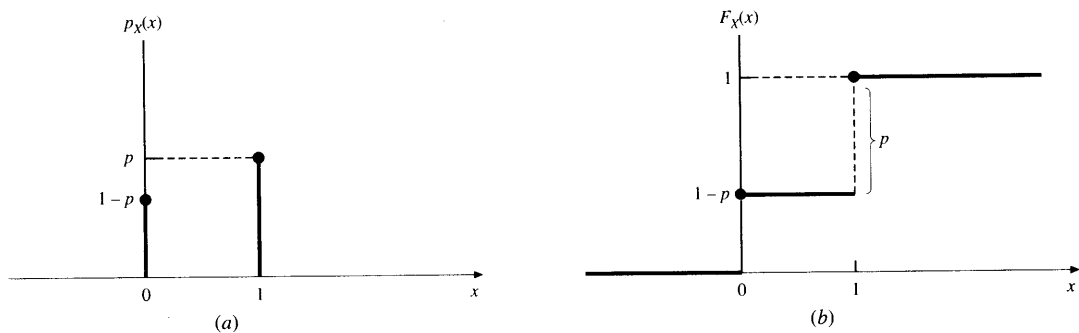


**Figura 2.4** Distribuzione di Bernoulli.

La media e la varianza della v.c.  $X$  di Bernoulli sono

$$\mu_X = E(X) = p \quad (2.34)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = p(1-p) \quad (2.35)$$

La v.c.  $X$  di Bernoulli è associata agli esperimenti in cui un risultato può essere classificato come “successo” o come “insuccesso”, dove la probabilità di un successo è  $p$ , mentre la probabilità di un insuccesso è  $1-p$ . Tali esperimenti vengono spesso chiamati *prove di Bernoulli* (Problema 1.61).

### Distribuzione binomiale

Una v.c.  $X$  viene chiamata v.c. *binomiale* con parametri  $(n, p)$  se la sua f.p. è data da

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.36)$$

dove  $0 \leq p \leq 1$  e

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

che è conosciuto come il coefficiente binomiale. La f.r. di  $X$  è

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad n \leq x < n+1 \quad (2.37)$$

La Figura 2.5 rappresenta la distribuzione binomiale per  $n = 6$  e  $p = 0,6$ .

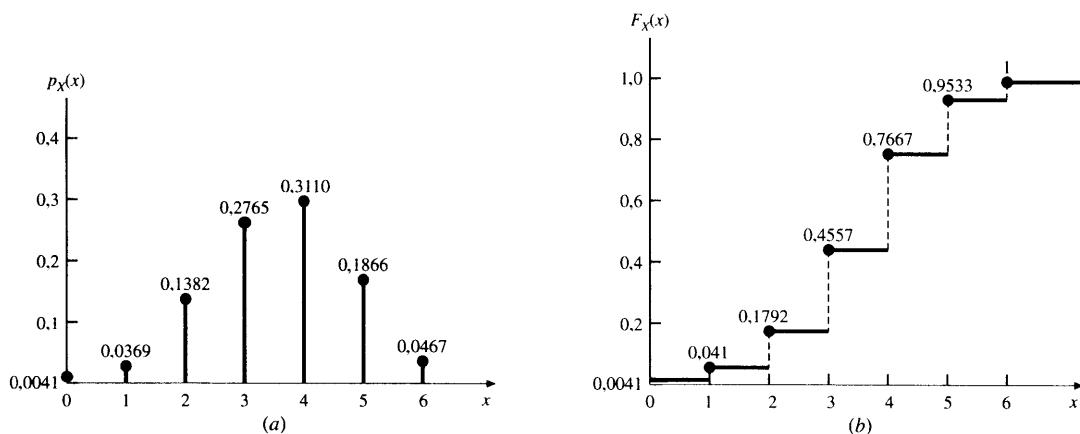


**Figura 2.5** Distribuzione binomiale con  $n = 6$ ,  $p = 0,6$ .

La media e la varianza della v.c.  $X$  binomiale sono (Problema 2.28)

$$\mu_X = E(X) = np \quad (2.38)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) \quad (2.39)$$

La v.c.  $X$  binomiale è associata agli esperimenti in cui vengono eseguite  $n$  prove di Bernoulli indipendenti,  $X$  rappresenta il numero di successi che si verificano nelle  $n$  prove. Si noti che una v.c. di Bernoulli non è altro che una v.c. binomiale con parametri  $(1, p)$ .

### Distribuzione di Poisson

Una v.c.  $X$  si dice di *Poisson* con parametro  $\lambda (> 0)$  se la sua f.p. è data da

$$p_X(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.40)$$

La f.r. di  $X$  è

$$F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} \quad n \leq x < n+1 \quad (2.41)$$

La Figura 2.6 illustra la distribuzione di Poisson per  $\lambda = 3$ .

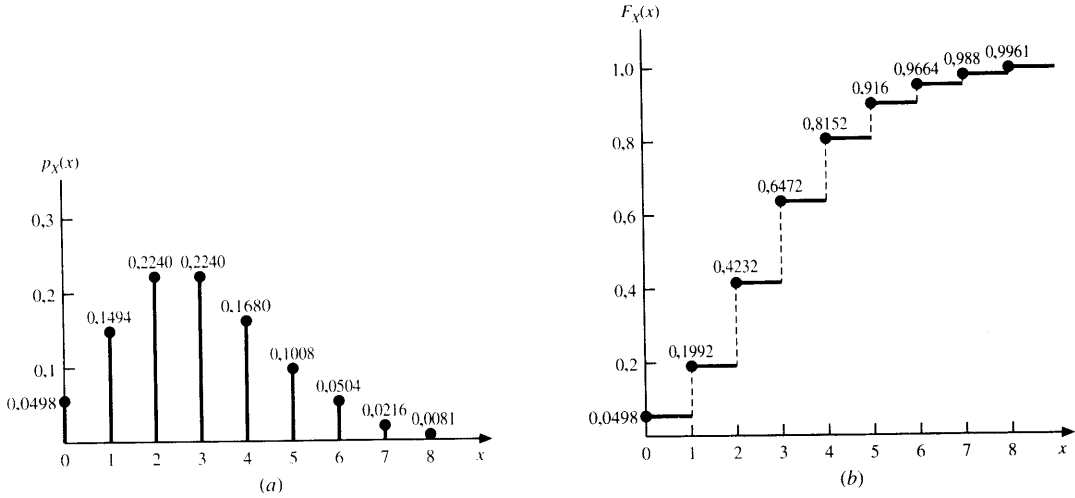


**Figura 2.6** Distribuzione di Poisson per  $\lambda = 3$ .

La media e la varianza della v.c.  $X$  di Poisson sono (Problema 2.29)

$$\mu_X = E(X) = \lambda \quad (2.42)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \lambda \quad (2.43)$$

La v.c. di Poisson trova applicazione in moltissimi casi poiché può essere usata come una approssimazione di una v.c. binomiale con parametri  $(n, p)$  quando  $n$  è grande e  $p$  abbastanza piccolo da far sì che  $np$  assuma un valore moderato (Problema 2.40).

Alcuni esempi della v.c. di Poisson sono:

1. Il numero di chiamate telefoniche che arrivano in un centralino in vari intervalli di tempo.
2. Il numero di refusi nella pagina di un libro.
3. Il numero di clienti che entrano in una banca in vari intervalli di tempo.

### Distribuzione uniforme

Una v.c.  $X$  si dice *uniforme* su  $(a, b)$  se la sua f.d. è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.44)$$

La f.r. di  $X$  è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \quad (2.45)$$

La Figura 2.7 illustra una distribuzione uniforme.

La media e la varianza della v.c. uniforme  $X$  sono (Problema 2.31)

$$\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2} \quad (2.46)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2.47)$$

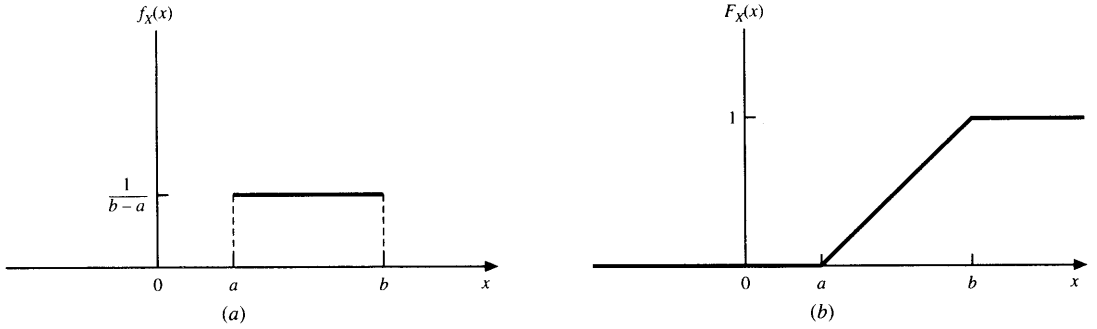


**Figura 2.7** Distribuzione uniforme su  $(a, b)$ .

La v.c.  $X$  uniforme è usata nel caso in cui non si conosca a priori la f.p. e tutti i valori di un certo intervallo possano considerarsi equiprobabili (Problema 2.69).

### Distribuzione esponenziale

Una v.c.  $X$  viene chiamata *esponenziale* con parametro  $\lambda (> 0)$  se la sua f.d. è data da

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

ed è tracciata nella Figura 2.8(a). La f.r. di  $X$  è

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

ed è tracciata nella Figura 2.8(b).

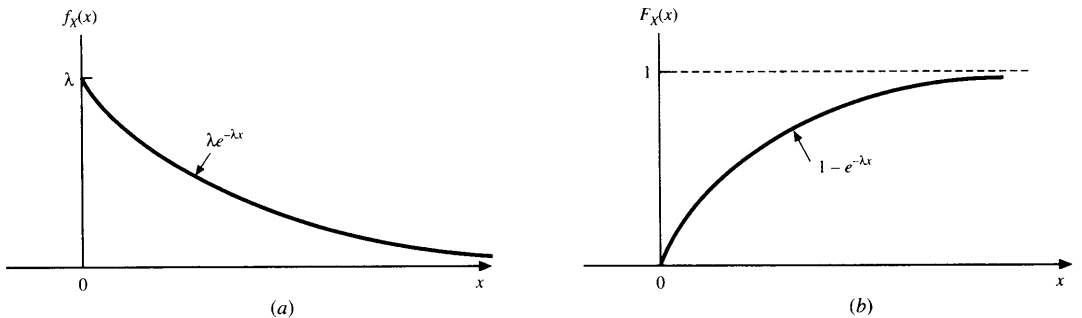


**Figura 2.8** Distribuzione esponenziale.

La media e la varianza della v.c. esponenziale  $X$  sono (Problema 2.32)

$$\mu_X = E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad (2.50)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (2.51)$$

La proprietà più interessante della distribuzione esponenziale è quella di essere “priva di memoria”. Con ciò si vuole dire che se la durata di un pezzo è distribuita in modo esponenziale, un pezzo già utilizzato per alcune ore è buono quanto uno nuovo ai fini del tempo rimanente fino alla sua rottura. La distribuzione esponenziale è la sola distribuzione che possiede questa proprietà (Problema 2.53).

### Distribuzione normale (o gaussiana)

Una v.c.  $X$  è detta *variabile casuale normale* (o *gaussiana*) se la sua f.d. è data da

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (2.52)$$

La f.r. di  $X$  è

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-(\xi-\mu)^2/(2\sigma^2)} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (2.53)$$

Questo integrale non è calcolabile tramite la primitiva e deve essere valutato numericamente. È quindi opportuno usare la funzione  $\Phi(z)$ , definita come

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (2.54)$$

per aiutarci a calcolare il valore di  $F_X(x)$ . Quindi la (2.53) può essere scritta come

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (2.55)$$

Sottintende che

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \quad (2.56)$$

Alcuni valori della funzione  $\Phi(z)$  sono presentati nella Tabella A (Appendice A). La Figura 2.9 illustra una distribuzione normale.

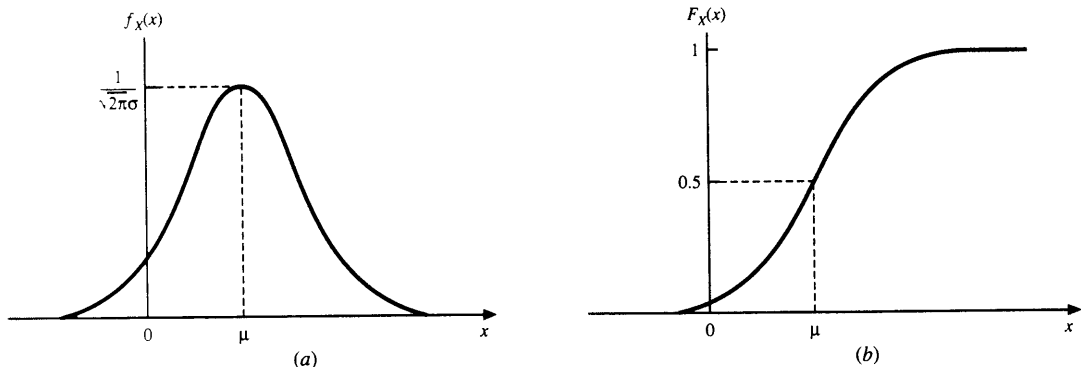


Figura 2.9 Distribuzione normale.

La media e la varianza della v.c. normale  $X$  sono (Problema 2.33)

$$\mu_X = E(X) = \mu \quad (2.57)$$

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (2.58)$$

Si dovrà usare la notazione  $N(\mu, \sigma^2)$  per indicare che  $X$  è normale con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Una v.c.  $Z$  normale con media zero e varianza unitaria, ossia  $Z = N(0, 1)$ , viene chiamata *variabile casuale normale standardizzata*. Si noti che la f.r. della v.c. normale standardizzata è data dalla (2.54). La v.c. normale è probabilmente il tipo più importate di v.c. continua. Essa ha svolto un ruolo significativo nello studio dei fenomeni casuali in natura, poiché molti di tali fenomeni possono considerarsi approssimativamente normali. Un altro motivo dell'importanza della v.c. normale è il cosiddetto *teorema centrale limite*, il quale afferma che la somma di un grande numero di v.c. indipendenti in alcune condizioni può essere approssimata da una v.c. normale (si veda il Capitolo 4, Paragrafo 8, teorema centrale limite).

## 2.8 DISTRIBUZIONI CONDIZIONATE

Nel Capitolo 1, al Paragrafo 6, la probabilità condizionata di un evento  $A$  dato l'evento  $B$  è definita come

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$$

La f.r. condizionata  $F_X(x|B)$  di una v.c.  $X$  dato l'evento  $B$  è definita come

$$F_X(x|B) = P(X \leq x|B) = \frac{P\{(X \leq x) \cap B\}}{P(B)} \quad (2.59)$$

La f.r. condizionata ha le stesse proprietà di  $F_X(x)$ . (Si veda il Problema 1.37 e il Paragrafo 2.3). In particolare,

$$F_X(-\infty|B) = 0 \quad F_X(\infty|B) = 1 \quad (2.60)$$

$$P(a < X \leq b|B) = F_X(b|B) - F_X(a|B) \quad (2.61)$$

Se  $X$  è una v.c. discreta, la f.p. condizionata  $p_X(x_k|B)$  è definita mediante

$$p_X(x_k|B) = P(X = x_k|B) = \frac{P\{(X = x_k) \cap B\}}{P(B)} \quad (2.62)$$

Se  $X$  è una v.c. continua, la f.d. condizionata  $f_X(x|B)$  è definita da

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx} \quad (2.63)$$

## PROBLEMI RISOLTI

### Variabili casuali

**2.1** Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare un dado non truccato. Sia  $X$  la v.c. che assegna 1 se il numero apparso è pari e 0 se il numero apparso è dispari.

(A) Qual è il campo di variazione di  $X$ ?

(B) Si calcolino  $P(X = 1)$  e  $P(X = 0)$ .

Lo spazio campionario  $S$  su cui  $X$  è definita consiste in 6 elementi equiprobabili:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(A) Il campo di variazione di  $X$  è  $R_X = \{0, 1\}$ .

(B)  $(X = 1) = \{2, 4, 6\}$ . Pertanto,  $P(X = 1) = 3/6 = 1/2$ . Analogamente,  $(X = 0) = \{1, 3, 5\}$  e  $P(X = 0) = 1/2$ .