

Hwei Hsu

Probabilità

variabili casuali e processi stocastici

- Probabilità
- Variabili casuali
- Processi stocastici
- Teoria della stima
- Teoria delle decisioni
- Teoria delle code

Sciam's

ESEMPIO 2.2 Nell'esperimento consistente nel lanciare tre volte una moneta non truccata (Problema 1.1), lo spazio campionario S_1 è composto da otto elementi equiprobabili $S_1 = \{HHH, \dots, TTT\}$. Se X è la v.c. che dà il numero di teste ottenute, si calcoli (A) $P(X = 2)$; (B) $P(X < 2)$.

(A) Sia $A \subset S_1$ l'evento definito da $X = 2$. Dal Problema 1.1, si avrà

$$A = (X = 2) = \{\zeta: X(\zeta) = 2\} = \{HHT, HTH, THH\}$$

Dato che gli elementi sono equiprobabili, si ottiene

$$P(X = 2) = P(A) = \frac{3}{8}$$

(B) Sia $B \subset S_1$ l'evento definito da $X < 2$. Quindi

$$B = (X < 2) = \{\zeta: X(\zeta) < 2\} = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$\text{e} \quad P(X < 2) = P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

2.3 FUNZIONI DI RIPARTIZIONE

Definizione

La *funzione di ripartizione (f.r.)* [o *funzione cumulativa delle frequenze*] di X è la funzione definita da

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad -\infty < x < \infty \quad (2.4)$$

La maggior parte delle informazioni relative a un esperimento casuale descritto dalla v.c. X è data dal comportamento di $F_X(x)$.

Proprietà di $F_X(x)$

Diverse proprietà di $F_X(x)$ derivano direttamente dalla definizione (2.4).

$$1. \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (2.5)$$

$$2. \quad F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad \text{se } x_1 < x_2 \quad (2.6)$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = F_X(\infty) = 1 \quad (2.7)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0 \quad (2.8)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = F_X(a^+) = F_X(a) \quad a^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a + \epsilon \quad (2.9)$$

La proprietà 1 segue dal fatto che $F_X(x)$ è una probabilità. La proprietà 2 mostra che $F_X(x)$ è una funzione non decrescente (Problema 2.5). Le proprietà 3 e 4 derivano dalla (1.22) e dalla (1.26):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(X \leq x) = P(X \leq \infty) = P(S) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(X \leq x) = P(X \leq -\infty) = P(\emptyset) = 0$$

La proprietà 5 indica che $F_X(x)$ è *continua a destra* ed è conseguenza della definizione (2.4).

x	$(X \leq x)$	$F_X(x)$
-1	$\emptyset$	0
0	(TTT)	1/8
1	(TTT, TTH, THT, HTT)	4/8 = 1/2
2	(TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH)	7/8
3	S	1
4	S	1

Tabella 2.1

ESEMPIO 2.3 Si consideri la v.c. X definita nell'Esempio 2.2. Si calcoli la f.r. $F_X(x)$ di X e se ne tracci il grafico.

La Tabella 2.1 fornisce $F_X(x) = P(X \leq x)$ per $x = -1, 1, 2, 3, 4$. Poiché il valore di X deve essere intero, il valore di $F_X(x)$ per valori non interi di x deve essere uguale a quello assunto nel valore intero inferiore più vicino di x . La $F_X(x)$ è tracciata nella Figura 2.3. Si noti che $F_X(x)$ presenta salti in $x = 0, 1, 2, 3$ e in ognuno di tali punti il valore corretto di $F_X(x)$ è il valore superiore.

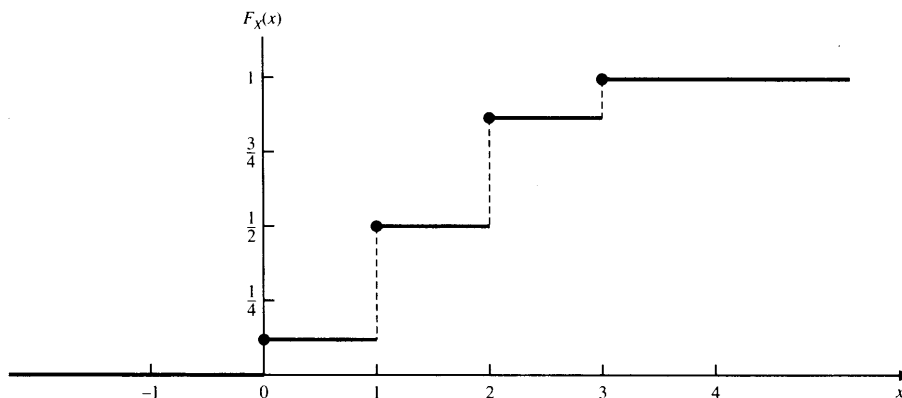


Figura 2.3

2.8 Sia X la v.c. definita nel Problema 2.3.

- (A) Si tracci il grafico della f.r. $F_X(x)$ di X e si specifichi di che tipo di v.c. si tratta.
 (B) Si calcoli (i) $P(X \leq 1)$, (ii) $P(1 < X \leq 2)$, (iii) $P(X > 1)$ e (iv) $P(1 \leq X \leq 2)$.
 (A) Dal risultato del Problema 2.3 e dalla (2.18) si avrà

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

il cui grafico è tracciato nella Figura 2.11. La v.c. X è discreta.

- (B) (i) Si vede che

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{2}$$

(ii) Dalla (2.10)

$$P(1 < X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(iii) Dalla (2.11) $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(iv) Dalla (2.64)

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + F_X(2) - F_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

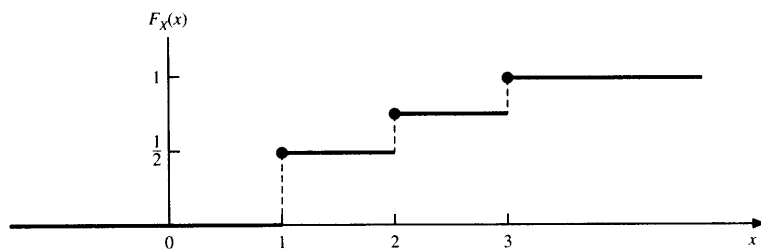


Figura 2.11

Variabili casuali discrete e f.p.

2.12 Si supponga che una v.c. X discreta abbia la seguente f.p.:

$$p_X(1) = \frac{1}{2} \quad p_X(2) = \frac{1}{4} \quad p_X(3) = \frac{1}{8} \quad p_X(4) = \frac{1}{8}$$

- (A) Si calcoli e si tracci il grafico della f.r. $F_X(x)$ di X .
 (B) Si calcoli (i) $P(X \leq 1)$, (ii) $P(1 < X \leq 3)$, (iii) $P(1 \leq X \leq 3)$.
 (A) Dalla (2.18) si ottiene

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{7}{8} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

il cui grafico è tracciato nella Figura 2.15.

- (B) (i) Dalla (2.12) si vede che

$$P(X < 1) = F_X(1^-) = 0$$

- (ii) Dalla (2.10)

$$P(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

- (iii) Dalla (2.64),

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X = 1) + F_X(3) - F_X(1) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

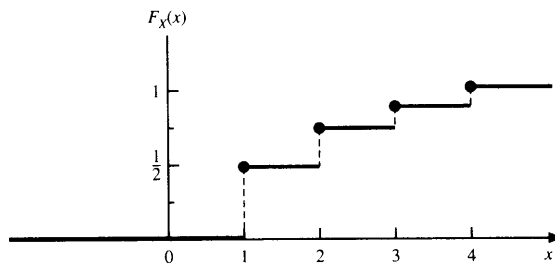


Figura 2.15

- 2.14** Si consideri l'esperimento consistente nel lanciare ripetutamente una moneta non truccata (Problema 1.35). Sia la v.c. X il numero di lanci fino a quando appare la prima testa.
- (A) Si calcoli e si tracci il grafico della f.p. $p_X(x)$ e della f.r. $F_X(x)$ di X .
 - (b) Si calcoli (i) $P(1 < X \leq 4)$, (ii) $P(X > 4)$.
 - (A) Dal risultato del Problema 1.35, la f.p. di X è data da

$$p_X(x) = p_X(k) = P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad k = 1, 2, \dots$$

Quindi dalla (2.18)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{m \leq x} p_X(k) = \sum_{k=1}^{m \leq x} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

dove m è il più grande numero intero che non supera x , ovvero

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \leq x < n+1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

I grafici di queste funzioni sono tracciati nella Figura 2.16.

(B) (i) Dalla (2.10)

$$P(1 < X \leq 4) = F_X(4) - F_X(1) = \frac{15}{16} - \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

(ii) Dalla (1.25)

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F_X(4) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

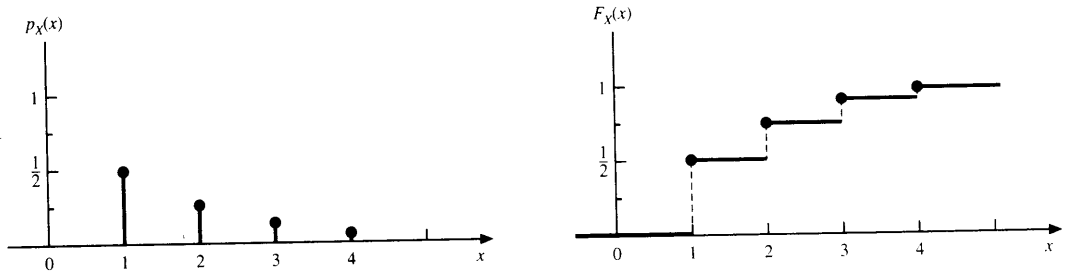


Figura 2.16