

LA LOGICA DEDUTTIVA

TAVOLE DI VERITA'

p	q	p	v	q	p	→	q	p	↔	q	p	&	q
T	T	T			T			T			T		
T	F	T			F			F			F		
F	T	T			T			F			F		
F	F	F			T			T			F		

A COSA SERVONO LE TAVOLE DI VERITA'?

Ci permettono di capire a colpo d'occhio le **proprietà e relazioni** tra proposizioni.

1. Testare la **validità** di un argomento.
2. Testare la **consistenza** di un insieme (set) di proposizioni
3. Determinare se una proposizione complessa è una **tautologia**, un'asserzione **contingente** o una **contraddizione**

VALIDITA'

Con le tavole di verità possiamo controllare la **validità degli argomenti deduttivi** (propositional logic).

Possiamo individuare 6 forme di argomento deduttivo: 4 valide e 2 invalide.

ARGOMENTI DEDUTTIVI VALIDI:

- **Modus Ponens**
- **Modus Tollens**
- **Sillogismo Ipotetico**
- **Sillogismo Disgiuntivo**

ARGOMENTI DEDUTTIVI INVALIDI:

- **Fallacia dell'affermazione del conseguente**
- **Fallacia della negazione dell'antecedente**

MODUS PONENS

Forma di MP

$p \rightarrow q$

p

Quindi,

q

Es:

P1. se mi arriva una nuova lettera dalla banca,
Allora andrò in fallimento.

P2. mi arriva una nuova lettera dalla banca.

quindi,
C: andrò in fallimento.

Testare la validità

Modus Ponens:

$p \rightarrow q$
p
quindi,
q

Premesse

Conclusione

p	q	$p \rightarrow q$	$p \text{ so } q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

RIGA RILEVANTE

Per testare la validità, guarda ad ogni riga in cui le premesse sono T. Controlla se anche la conclusione, in quelle righe, è T. Se la conclusione è T in ogni riga in cui le premesse sono T, allora l'argomento è **VALIDO**.

Modus Tollens

$p \rightarrow q$

$\sim q$

quindi,

$\sim p$

Es:

P1. se sei stupido, allora non ti chiedi mai “sono stupido?”

P2. non è vero che non ti chiedi mai “sono stupido?”

quindi,

C. Non sei stupido

Modus Tollens

$p \rightarrow q$

$\sim q$

Therefore,

$\sim p$

Premises

Conclusion

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	so	$\sim p$
T	T	T	F		F
T	F	F	T		F
F	T	T	F		T
F	F	T	T		T

Relevant Row

SILLOGISMO IPOTETICO

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

QUINDI,

$p \rightarrow r$

ES:

P1. se Dio esiste, allora l'universo è perfetto

P2. se l'universo è perfetto, allora nessuno brucerà all'inferno.

quindi,

C: Dio esiste, allora nessuno brucerà all'inferno.

SILLOGISMO IPOTETICO

$p \rightarrow q$
 $q \rightarrow r$
Therefore,
 $p \rightarrow r$

Premises

Conclusion

p	q	r	p → q		q → r		so	p → r	
T	T	T	T		T			T	← Relevant Rows
T	T	F	T		F			F	
T	F	T	F		T			T	
T	F	F	F		T			F	
F	T	T	T		T			T	← Relevant Rows
F	T	F	T		F			T	
F	F	T	T		T			T	← Relevant Rows
F	F	F	T		T			T	← Relevant Rows

Sillogismo Disgiuntivo

$p \vee q$

$\sim p$

quindi,

q

Es:

P1. O gli animali non sono consci o gli animali soffrono

P2. non è vero che gli animali non sono consci .

C: gli animali soffrono.

Sillogismo Disgiuntivo

$p \vee q$

$\sim p$

Therefore,

q

Premises

Conclusion

p	q	p	$\vee$	q	$\sim$	p	so	q
T	T		T		F			T
T	F		T		F			F
F	T		T		T			T
F	F		F		T			F

Relevant
Row

Riassumendo

Modus Ponens (M.P.)

Modus Tollens (M.T.)

Sillogismo Ipotetico (S.I.)

Sillogismo Disgiuntivo (S.D.)

Sono tutte forme **VALIDE** di argomento deduttivo

LE DUE FORME INVALIDE

LE DUE FORME INVALIDE DI
ARGOMENTI DEDUTTIVI POSSONO
TRARRE IN INGANNO.

AFFERMARE IL CONSEQUENTE

$p \rightarrow q$

q

p

Es:

P1. Se Michael Jackson fu assassinato, allora MJ è morto.

P2. MJ è morto.

Quindi,

C: Michael Jackson fu assassinato.

Questo argomento è invalido: **perchè?**

Affermazione del Conseguente

$p \rightarrow q$

q

Therefore,

p

Premises

Conclusion

p	q	p	→	q	q	so	p
T	T		T		T		T
T	F		F		F		T
F	T		T		T		F
F	F		T		F		F

Questa riga mostra
che l'argomento è
invalido

Negazione dell'Antecedente

$p \rightarrow q$

$\sim p$

quindi,

$\sim q$

Es:

P1. Se hai esattamente sei euro, allora hai più di cinque euro.

P2. Non hai esattamente sei euro.

Quindi

C: Non hai più di cinque euro.

Negazione dell'antecedente

$p \rightarrow q$

$\sim p$

quindi,

$\sim q$

Premises

Conclusion

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	F	F
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	T	T

Questa riga mostra che l'argomento è **invalido**: le premesse sono vere e la conclusione è falsa.

PERCHE' E' IMPORTANTE TESTARE LA CONSISTENZA?

- 1) Se siamo razionali vogliamo che le proposizioni oggetto delle nostre credenze siano consistenti.
- 2) Qualche volta le inconsistenze non sono così ovvie, o sono nascoste.

UN PICCOLO ESEMPIO

A: B, mi ami?

B: Certo che ti amo!

A: E pensi che se uno ama una persona, non la tradisce?

B: Certo, non c'è amore senza fedeltà.

A: Allora come spieghi questo video di te e C che vi vede, diciamo, impegnati in queste curiose attività?

B: Dove l'hai preso?

A: Non è importante. Quello che è importante è che mi hai tradito.

B: Bè, in effetti...

A: Dunque non mi ami.

B: Ma dai...certo che ti amo.

A: Ma hai appena ammesso che mi hai tradito e che chi ama non tradisce. Ne segue che non mi ami.

B: Ma su! Che c'entra la logica ora! ?

A: Oh,così non solo sei infedele, ma sei anche completamente irrazionale?

T-V E CONSISTENZA

puoi usare le tavole per vedere se un set di proposizioni è inconsistente:

{[Io ti amo.], [Se io ti amo, allora ti sono fedele.], [Io non ti sono fedele.]}

Traduciamo nel linguaggio artificiale:

[io ti amo.] = p

[io ti sono fedele.] = q

Così:

{[io ti amo.], [Se io ti amo, allora ti sono fedele.], [io non ti sono fedele.]}

Si riscrive come segue:

{ p , $p \rightarrow q$, $\neg q$ }

Le connettiamo tra loro :

Le parentesi servono per raggruppare

(p	&	(p	→	q)	)	&	¬q
V	V		V	V		F	F
V	F		F	F		F	V
F	F		V	V		F	F
F	F		V	F		F	V

Connettivo principale

Ci sono 2 modi per leggere il risultato. 1) Ci sono solo le F sotto il connettivo principale?
2) C'è una riga in cui ci sono solo V?

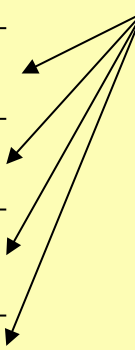
Se la risposta alla prima domanda è **si**, o se è **no** alla seconda, allora l'insieme è **inconsistente**.

OPPURE

SENZA CONNETTERLE:

$p, (p \rightarrow q), \neg q$

V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V



Esamina ogni riga per vedere se c'è un caso in cui trovi solo V. Se la trovi è un insieme **consistente**, altrimenti è **inconsistente**.

CONGIUNZIONE

- Quando ti chiedi se un insieme di proposizione è consistente, vuoi sapere se quelle proposizioni possono essere $\vee$ tutte insieme.
- Inoltre, quando ti chiedi se l'insieme è consistente, ti stai anche chiedendo qualcosa sulla POSSIBILITA': è possibile per tutte queste proposizioni essere $\vee$ simultaneamente?
- Scoprire che è IMPOSSIBILE ha una conseguenza: c'è almeno una delle proposizioni che **deve necessariamente essere falsa**.

INCONSISTENZA E CONTRADDIZIONE

se un set contiene “ $p \ \& \ \neg p$ ”, o se “ $p \ \& \ \neg p$ ”
può essere validamente derivata dal set,
allora il set è inconsistente.

Per esempio:

$\{p, q, r \ \& \ \neg r\}$

è inconsistente.

Qualche volta la contraddizione è nascosta

In:

$\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$

Non c'è qualche “ $p \ \& \ \neg p$ ”, così poi pensare che è un set consistente.

Ma se puoi mostrare che puoi validamente derivare una contraddizione, allora avrai mostrato la sua inconsistenza.

LE CONTRADDIZIONI PORTANO ALLA FALSITA' LOGICA:

p	&	$\neg p$
V	F	F
F	F	V

p	$\leftrightarrow$	$\neg p$
V	F	F
F	F	V

$\neg (p \vee \neg p)$
F
F

$$\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$$

Vediamo come possiamo derivare la contraddizione:

- Introduciamo una regola che dice che “se possiamo derivare p dalle proposizioni del set, e se possiamo derivare q , allora possiamo mettere insieme p e q ”, ottenendo **$p \ \& \ q$** . (diremo che $p \ \& \ q$ sono derivabili dal set). Più in generale: diciamo che possiamo connettere ogni cosa che deriviamo dal set (**congiunzione**).

$$\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$$

Applichiamo prima la regola del **Modus Ponens**, poi quella della **coniunzione**

$$p \rightarrow q$$

$$p$$

Quindi (M.P.),

$$q$$

Abbiamo già $\neg q$ nel set, così per la regola della congiunzione otteniamo:

$$q \ \& \ \neg q$$

Il set è **inconsistente**.

Ancora un esempio...

Questo set è inconsistente in un modo meno ovvio del precedente:

$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, (p \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q), q\}$

Ecco i primi due passi della prova:

1.

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

Quindi (**sillogismo ipotetico**)

$p \rightarrow r$

2.

$(p \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)$

$p \rightarrow r$

Quindi (**modus ponens**)

$r \rightarrow \neg q$

Gli altri due passi

$\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, (p \rightarrow r) \rightarrow (r \rightarrow \neg q), q\}$

Abbiamo derivato e possiamo usare::

$p \rightarrow r$ e $r \rightarrow \neg q$

3.

$q \rightarrow r$

q

Quindi (**Modus Ponens**)

r

4.

$r \rightarrow \neg q$

r

Quindi (**Modus Ponens**)

$\neg q$

Ma ora abbiamo **q & $\neg q$** per la regola della **congiunzione**.

TAVOLE DI VERITA'

p	q	p	v	q	p	$\rightarrow$	q	p	$\leftrightarrow$	q	p	$\&$	q
T	T	T			T			T			T		
T	F	T			F			F			F		
F	T	T			T			F			F		
F	F	F			T			T			F		

REGOLE DI DERIVAZIONE

Assunzione (A)

p

Modus Ponens (MP)

$p \rightarrow q$

p

$\diamond q$

Modus Tollens (MT)

$p \rightarrow q$

$\sim q$

$\diamond \sim p$

Doppia Negazione (DN)

$\sim \sim p$

$\diamond p$

p

$\diamond \sim \sim p$

Congiunzione (Cong.)

p

q

$\diamond p \ \& \ q$

Semplificazione (Semp.)

$p \ \& \ q$

$\diamond p$

Sillogismo Ipotetico (SI)

$p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

◆ $p \rightarrow r$

Sillogismo Disgiuntivo (SD)

$p \vee q$

$\sim p$

◆ q

Addizione (Add.)

p

◆ $p \vee q$

Assorbimento (Ass.)

$p \rightarrow q$

◆ $p \rightarrow (p \& q)$

Dilemma Costruttivo (DC)

$(p \rightarrow q) \& (r \rightarrow s)$

$p \vee r$

◆ $q \vee s$

Tautologie, Asserzioni Contingenti e Contraddizioni

- **TAUTOLOGIE:** Sempre V nelle tavole di verità
- **CONTINGENTI :** Almeno una V e almeno una F nelle tavole di verità
- **CONTRADDIZIONI:** Sempre F nelle tavole di verità.

Dalle contraddizioni alle tautologie

Le contraddizioni sono sempre false, così che succede se si nega una contraddizione?



Si ottiene **una tautologia**.

ALCUNE COMUNI TAUTOLOGIE

$\sim (p \& \sim p)$	LEGGE DI NON CONTRADDIZIONE		
T	T	F	F
T	F	F	T

p	v	$\sim p$	LEGGE DEL TERZO ESCLUSO	
T	T	F		
F	T	T		

p	$\rightarrow$	p	LEGGE D'IDENTITA'	
T	T	T		
F	T	F		

TEOREMI DI DE MORGAN

- $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \ \& \ \sim q)$
- $\sim(p \ \& \ q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
- Questi bicondizionali sono tautologie, o **equivalenze logiche**