

Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

Fondamenti della Matematica

Prova scritta – 14 Giugno 2011

Risolvere i seguenti esercizi, giustificando le risposte date.

- (1) Considerato un riferimento cartesiano Ox su una retta, ed il punto A di coordinate $A(-1)$, determinare i punti della retta che hanno distanza (euclidea) da A pari a $\frac{5}{2}$.
- (2) In una divisione tra numeri naturali, il dividendo è 41 ed il resto è 5. Determinare divisore e quoziente.
- (3) Scrivere sotto forma di potenza (cioè come a^b) il numero

$$\frac{17^2}{17^{-3} \cdot 17^{\frac{1}{2}}}$$

- (4) L'area di un triangolo isoscele è 12 cm^2 e la sua base è di 6 cm . Determinare il perimetro del triangolo.
- (5) Occorre saldare un debito di 500 Euro in rate, ma ogni rata non può superare i 150 Euro. Si decide di saldare il 20% del debito nella prima rata. Della parte rimanente, un quinto viene saldato nella seconda rata, e nella terza rata vengono saldati 150 Euro. È possibile saldare il debito con una sola altra rata?
- (6) Rappresentare in un piano cartesiano il triangolo di vertici $A(1, -1)$, $B(0, 3)$ e $C(4, 5)$, e determinare il triangolo i cui vertici sono i punti medi dei lati del triangolo ABC .
- (7) In un condominio, 2 persone hanno 45 anni, 1 ha 3 anni, 1 ha 27 anni e 3 hanno 31 anni. Determinare media aritmetica, mediana e moda degli abitanti del condominio.
- (8) Un'urna contiene 10 palline: alcune bianche, altre rosse e altre ancora nere. Viene effettuato un certo numero di estrazioni casuali di una pallina (che dopo ciascuna estrazione è stata rimessa nell'urna), ottenendo il seguente risultato: 22 palline bianche, 47 palline rosse, 131 palline nere. Dovendo scommettere su quante sono le palline bianche nell'urna, è preferibile orientarsi su qualche numero in particolare?
- (9) Dati gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, determinare gli insiemi $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$, e $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, *senza* usare la rappresentazione per elencazione.
- (10) Scrivere la legge che fornisce la misura h dell'altezza di un triangolo equilatero rispetto alla lunghezza ℓ di uno qualunque dei lati, e rappresentare l'andamento di tale legge in un opportuno piano cartesiano.

Nota: Tempo a disposizione: 100 minuti. È consentito solo l'uso delle note del corso, del libro di testo, delle dispense e della macchina calcolatrice (non programmabile).

Consegnare tutti i fogli ricevuti firmati con nome, cognome ed **un codice di 5 cifre** a scelta dell'esaminando (ad. es. il numero di matricola), che verrà usato per la comunicazione dell'esito della prova. **Anche il testo della prova va riconsegnato.**

Ogni esercizio vale al massimo 3 punti. L'esito della prova sarà pubblicato sullo spazio web del docente presso il portale docenti di Unimc.

Svolgimento della prova scritta del 14 Giugno 2011

- (1) Considerato un riferimento cartesiano Ox su una retta, ed il punto A di coordinate $A(-1)$, determinare i punti della retta che hanno distanza (euclidea) da A pari a $\frac{5}{2}$.

Si ragiona come visto analogamente in altri esercizi: se un punto P , di coordinata x_P dista $\frac{5}{2}$ da A allora deve essere $|x_P - x_A| = \frac{5}{2}$, cioè $|x_P - (-1)| = \frac{5}{2}$, da cui le due possibilità

$$\begin{aligned}x_P + 1 &= \frac{5}{2} \Rightarrow x_P = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \\x_P + 1 &= -\frac{5}{2} \Rightarrow x_P = -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2},\end{aligned}$$

le due possibilità sono quindi $P_1(\frac{3}{2})$ e $P_2(-\frac{7}{2})$.



- (2) In una divisione tra numeri naturali, il dividendo è 41 ed il resto è 5. Determinare divisore e quoziente.

Con riferimento alla notazione usata in prove precedenti (ad es. nella simulazione), $D = 41$ ed $r = 5$, per cui $dq = 41 - 5 = 36$. Questo significa che

$$(d, q) \in \{(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6), (9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)\}.$$

Dovendo però essere $r < d$, cioè $d > 5$, le prime quattro possibilità vanno scartate, per cui le soluzioni possibili sono: $(d = 6, q = 6)$, $(d = 9, q = 4)$, $(d = 12, q = 3)$, $(d = 18, q = 2)$, $(d = 36, q = 1)$.

- (3) Scrivere sotto forma di potenza (cioè come a^b) il numero

$$\frac{17^2}{17^{-3} \cdot 17^{\frac{1}{2}}}$$

Usando le regole dell'elevamento a potenza il numero proposto si può semplificare come segue:

$$\frac{17^2}{17^{-3} \cdot 17^{\frac{1}{2}}} = \frac{17^2}{17^{-3+\frac{1}{2}}} = \frac{17^2}{17^{-\frac{5}{2}}} = 17^2 \cdot 17^{\frac{5}{2}} = 17^{2+\frac{5}{2}} = 17^{\frac{9}{2}}.$$

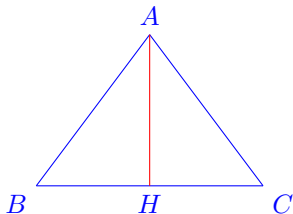
- (4) L'area di un triangolo isoscele è 12 cm^2 e la sua base è di 6 cm . Determinare il perimetro del triangolo.

Chiamiamo A, B, C i vertici del triangolo, essendo BC la sua base (che misura 6 cm). Allora l'altezza AH relativa alla base misura $\overline{AH} = \frac{2 \cdot 12}{6} = 4 \text{ cm}$, ricordando che l'area di ABC è data da $\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \overline{AH}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABH si trova (dopo aver osservato che $\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3 \text{ cm}$) che

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm},$$

e quindi il perimetro del triangolo è dato da

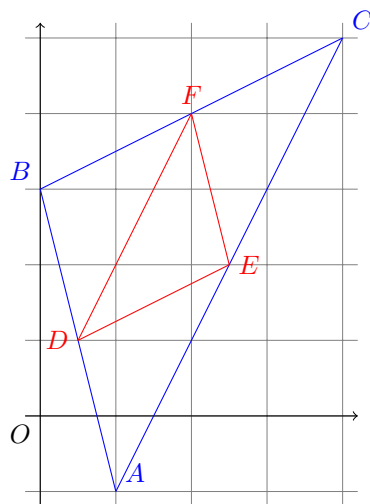
$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 5 + 5 + 6 = 16 \text{ cm}.$$



- (5) *Occorre saldare un debito di 500 Euro in rate, ma ogni rata non può superare i 150 Euro. Si decide di saldare il 20% del debito nella prima rata. Della parte rimanente, un quinto viene saldato nella seconda rata, e nella terza rata vengono saldati 150 Euro. È possibile saldare il debito con una sola altra rata?*

La prima rata salda il 20% di 500 Euro, cioè $500 \cdot 0,2 = 100$ Euro. La parte rimanente è dunque 400 Euro, un quinto della quale, cioè $400 \cdot \frac{1}{5} = 80$ Euro, viene saldato nella seconda rata. Nella terza rata vengono saldati 150 Euro, dunque rimangono da saldare $500 - 100 - 80 - 150 = 170$ Euro. Non potendo ciascuna rata superare i 150 Euro, non è possibile quindi saldare tutto il debito con una sola altra rata.

- (6) *Rappresentare in un piano cartesiano il triangolo di vertici $A(1, -1)$, $B(0, 3)$ e $C(4, 5)$, e determinare il triangolo i cui vertici sono i punti medi dei lati del triangolo ABC .*



Ragionando come in esercizi analoghi per trovare le coordinate dei punti medi di un segmento si determinano le coordinate di D, E, F , punti medi rispettivamente di AB, AC e BC .

$$x_D = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_D = \frac{-1+3}{2} = 1,$$

$$x_E = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_E = \frac{-1+5}{2} = 2,$$

$$x_F = \frac{0+4}{2} = 2, \quad y_F = \frac{3+5}{2} = 4,$$

per cui le coordinate dei vertici del triangolo DEF sono $D(\frac{1}{2}, 1)$, $E(\frac{5}{2}, 2)$, e $F(2, 4)$.

- (7) *In un condominio, 2 persone hanno 45 anni, 1 ha 3 anni, 1 ha 27 anni e 3 hanno 31 anni. Determinare media aritmetica, mediana e moda degli abitanti del condominio.*

La moda è pari a 31 anni, perché è il valore che si presenta con la maggior frequenza (3 persone). Per la mediana determiniamo anzitutto la successione dei dati statistici, in ordine crescente d'età:

3, 27, 31, 31, 31, 45, 45,

da cui determiniamo la mediana che è anch'essa pari a 31 anni. Infine, calcoliamo la media aritmetica:

$$m_A = \frac{3 + 27 + 31 \cdot 3 + 45 \cdot 2}{7} = \frac{213}{7} \cong 30.43 \text{ anni}.$$

- (8) *Un'urna contiene 10 palline: alcune bianche, altre rosse e altre ancora nere. Viene effettuato un certo numero di estrazioni casuali di una pallina (che dopo ciascuna estrazione è stata rimessa nell'urna), ottenendo il seguente risultato: 22 palline bianche, 47 palline rosse, 131 palline nere. Dovendo scommettere su quante sono le palline bianche nell'urna, è preferibile orientarsi su qualche numero in particolare?*

In questo caso sono state effettuate $22 + 47 + 131 = 200$ estrazioni, e di queste 22 hanno avuto come esito l'estrazione di una pallina bianca, con frequenza relativa pari dunque a $\frac{22}{200} = 0.11$. In base alla concezione frequentista della probabilità possiamo dire che la probabilità (frequentista) che esca una pallina bianca è 0.11, cioè 11%.

Secondo la legge empirica del caso, al crescere del numero delle estrazioni, la frequenza relativa di un certo evento casuale si approssima (benché in modo non regolare) alla probabilità (classica) dell'evento. Questo significa che possiamo ragionevolmente supporre che 11% sia un valore "vicino" alla probabilità classica di estrarre una pallina bianca.

Ma l'11% di 10 (il numero di palline totali dell'urna) è 1.1, e ovviamente non ha senso concludere che «l'urna contiene 1.1 palline bianche», ma possiamo scommettere con buona probabilità di vittoria che nell'urna c'è 1 sola pallina bianca.

- (9) *Dati gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, determinare gli insiemi $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$, e $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, senza usare la rappresentazione per elencazione.*

Dal momento che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, cioè l'insieme dei numeri naturali è un sottinsieme di quello degli interi, l'intersezione è data dall'insieme “più piccolo” (cioè $\mathbb{N}$) e l'unione da quello “più grande” (cioè $\mathbb{Z}$): $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Per determinare la differenza tra i due insiemi, $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$, è sufficiente osservare che questa è costituita dai soli interi negativi. Un modo per rappresentare tale insieme è quindi $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

- (10) *Scrivere la legge che fornisce la misura h dell'altezza di un triangolo equilatero rispetto alla lunghezza ℓ di uno qualunque dei lati, e rappresentare l'andamento di tale legge in un opportuno piano cartesiano.*

Si ragiona come in esercizi analoghi già visti. Il teorema di Pitagora ci dice che $h^2 + \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2 = \ell^2$, cioè $h = \ell \frac{\sqrt{3}}{2}$ (visto che stiamo parlando di numeri positivi). Quindi la legge che esprime h in funzione di ℓ è dunque

$$h(\ell) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell.$$

Si tratta quindi di una legge di proporzionalità diretta il cui grafico è una retta passante per l'origine del piano cartesiano, il cui andamento approssimativamente è quello in figura:

