

Università degli Studi di Macerata, Facoltà di Economia

A.A. 2009-10

Elementi di Calcolo delle Probabilità

Teoria Matematica del Portafoglio Finanziario

DOCENTE: ROY CERQUETI

Foglio di esercizi 9

1. Consideriamo due problemi di Markowitz generati da investimenti su uno stesso set di due titoli, con soglie di rendimento atteso pari a $\bar{\mu}_1 = 2,5\%$ e $\bar{\mu}_2 = 4\%$. Si immagini che le soluzioni (scritte in forma vettoriale) dei due problemi siano rispettivamente $\mathbf{x}_1 = (1, 1; -0, 1)$ e $\mathbf{x}_2 = (0, 76; 0, 24)$. Scrivere la soluzione del problema di Markowitz con stessi titoli, ma con una soglia di rendimento atteso pari a $\bar{\mu} = 3,1\%$.
2. Consideriamo tre titoli con i seguenti rendimenti aleatori:

$$X_1 = \begin{cases} 2\% & p = 0.4 \\ 4\% & p = 0.35 \\ 8\% & p = 0.25, \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1\% & p = 0.2 \\ 6\% & p = 0.55 \\ 9\% & p = 0.25, \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 3\% & p = 0.1 \\ 7\% & p = 0.15 \\ 8\% & p = 0.75, \end{cases}$$

Si supponga che i tre titoli non siano indipendenti, e che risultino $\rho_{1,2} = 0.2$, $\rho_{1,3} = -0.35$ e i titoli X_2 e X_3 siano scorrelati.

- Si costruisca il portafoglio composto dai tre titoli X_1, X_2, X_3 che massimizzi l'utilità $G(\sigma^2, \mu) = 3\mu^2 - 2\sigma^2$.
 - Si costruiscano i portafogli ottimi composti da X_1 e X_2 , da X_1 e X_3 e da X_2 e X_3 , in modo da massimizzare l'utilità $G(\sigma^2, \mu) = \frac{2\mu}{5\sigma^2}$.
3. Ordinare le seguenti somme incerte dalla migliore alla peggiore attraverso il criterio della dominanza stocastica del I ordine e del II ordine, se é possibile.

$$X_1 = \begin{cases} 30, & 1/8; \\ 31, & 1/8; \\ 50, & 1/2; \\ 55, & 1/4. \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 20, & 1/2; \\ 35, & 1/8; \\ 40, & 5/16; \\ 45, & 1/16. \end{cases} \quad X_3 = \begin{cases} 25, & 1/3; \\ 42, & 1/6; \\ 43, & 7/16; \\ 60, & 1/16. \end{cases}$$

$$X_4 = \begin{cases} 10, & 3/4; \\ 15, & 1/4. \end{cases} \quad X_5 = \begin{cases} 5, & 1/2; \\ 25, & 1/8; \\ 30, & 3/8. \end{cases} \quad X_6 = \begin{cases} 20, & 7/16; \\ 29, & 5/16. \end{cases}$$

4. Commentare i risultati dell'esercizio precedente nell'ottica della teoria dell'utilità attesa.
5. **FACOLTATIVO, DIFFICILE:** Trovare delle funzioni di utilità che forniscano risultati contraddittori per le coppie di somme incerte non confrontabili attraverso il criterio della dominanza stocastica del I o del II ordine.
6. Stabilire quali tra le seguenti funzioni possa descrivere una funzione di utilità sul piano M-V, e in caso utilizzarle per confrontare le somme incerte degli esercizi precedenti attraverso le relative curve di indifferenza:

- $G(\sigma^2, \mu) = \mu^4 \log(\sigma^2) - 5 + 3\mu$;
- $G(\sigma^2, \mu) = -3\mu + \exp[-\sigma^2]$;
- $G(\sigma^2, \mu) = -\exp[-4\sigma^2]\mu^2 - 4$;
- $G(\sigma^2, \mu) = \log(3\mu^5\sigma^2) - 4\log(\sigma^2)$;
- $G(\sigma^2, \mu) = \exp[-5\sigma^2 + 7\mu - 4] + 3\mu^5 + 8/\sigma^2$.