

Università degli Studi di Macerata, Facoltà di Economia

A.A. 2011-12

## Elementi di Calcolo delle Probabilità

### Teoria Matematica del Portafoglio Finanziario

DOCENTE: ROY CERQUETI

#### Foglio di esercizi 2

1. Dati due titoli  $A_1$  e  $A_2$ , dette  $x_1$  e  $x_2$  le quote su tali titoli (rispettivamente) che costituiscono il portafoglio  $P$ , detti  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_P$  i rendimenti di  $A_1$ ,  $A_2$  e  $P$ , assumiamo che

$$R_1 = \begin{cases} r_{11}, & p_1; \\ r_{12}, & p_2; \end{cases} \quad R_2 = \begin{cases} r_{21}, & q_1; \\ r_{22}, & q_2; \end{cases}$$

Supponiamo che la distribuzione congiunta di  $R_1$  e  $R_2$  sia definita attraverso la matrice  $(s_{ij})_{i,j=1,2}$ , dove

$$s_{ij} = P(\{R_1 = r_{1i}\} \cap \{R_2 = r_{2j}\}), \quad i = 1, 2; j = 1, 2.$$

Dimostrare che:

$$\mathbb{E}(R_P) = x_1 \mathbb{E}(R_1) + x_2 \mathbb{E}(R_2).$$

Calcolare inoltre  $Var(R_P)$ .

2. Confrontare, se possibile, le operazioni seguenti attraverso il criterio M-V:

$$X_1 = \begin{cases} 30, & 1/4; \\ 35, & 1/2; \\ 50, & 1/8; \\ 55, & 1/8. \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 35, & 1/2; \\ 40, & 1/16; \\ 65, & 7/16. \end{cases} \quad X_3 = \begin{cases} 40, & 1/3; \\ 42, & 1/6; \\ 48, & 1/2. \end{cases}$$

$$X_4 = \begin{cases} 32, & 1/10; \\ 35, & 1/5; \\ 41, & 1/5; \\ 68, & 1/2. \end{cases} \quad X_5 = \begin{cases} 21, & 1/3; \\ 22, & 1/3; \\ 24, & 1/3. \end{cases} \quad X_6 = \begin{cases} 42, & 1/7; \\ 45, & 2/3; \\ 49, & 4/21. \end{cases}$$

3. Stabilire quali delle operazioni incerte precedenti non possono appartenere alla frontiera efficiente della regione ammissibile, motivando la risposta.
4. Stabilire quali tra le seguenti funzioni possa descrivere una funzione di utilità sul piano M-V, e in caso utilizzarle per confrontare i rendimenti incerti  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  attraverso le relative curve di indifferenza:

- $\tilde{u}_1(\sigma^2, \mu) = \mu^4 - \log(\sigma^2) - 5 + 3\mu$ ;
- $\tilde{u}_2(\sigma^2, \mu) = -3\mu + \exp[-\sigma^2]$ ;
- $\tilde{u}_3(\sigma^2, \mu) = -\exp[-4\sigma^2] + \mu^2 - 4$ ;
- $\tilde{u}_4(\sigma^2, \mu) = \log(3\mu^5) - 4\log(\sigma^2)$ .

5. Date le funzioni di utilità seguenti:

$$u_1(x) = 2\log(3x); \quad u_2(x) = 3(1 - \exp(-x/4)); \quad u_3(x) = \sqrt[5]{x^2},$$

valutare le operazioni finanziarie  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  attraverso le curve di indifferenza generate da  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$ .

6. Costruire i portafogli seguenti, composti con le somme  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_5$ ,  $X_6$ :

- $P_1$ : sono ammesse vendite allo scoperto. Investo la metà del capitale su  $X_2$ , i 3/4 del capitale su  $X_4$  e il resto equamente distribuito tra  $X_1$ ,  $X_3$  e  $X_5$ ;
- $P_2$ : sono ammesse vendite allo scoperto. Investo equamente il 150% del capitale su  $X_1$  e  $X_2$ , i 2/5 del capitale su  $X_4$ , chiedo a prestito la metà dell'ammontare del capitale su  $X_5$  e il resto viene equamente distribuito tra gli altri titoli;
- $P_3$ : non sono ammesse vendite allo scoperto. Investo su  $X_1$  il doppio di quanto investo su  $X_2$ , i 3/5 del capitale su  $X_3$ , su  $X_4$  investo il triplo di quanto investo su  $X_2$  e il resto equamente tra  $X_5$  e  $X_6$ ;
- $P_4$ : non sono ammesse vendite allo scoperto. Investo il 90% del capitale su  $X_1$ , la metà del resto del capitale diviso tra  $X_2$  e  $X_3$  e quello che avanza su  $X_4$ .