

Università degli Studi di Macerata, Facoltà di Economia

A.A. 2012-13

Elementi di Calcolo delle Probabilità

Teoria Matematica del Portafoglio Finanziario

DOCENTE: ROY CERQUETI

Foglio di esercizi 4

1. Consideriamo due problemi di Markowitz generati da investimenti su uno stesso set di due titoli, con soglie di rendimento atteso pari a $\bar{\mu}_1 = 2,5\%$ e $\bar{\mu}_2 = 4\%$. Si immagini che le soluzioni (scritte in forma vettoriale) dei due problemi siano rispettivamente $\mathbf{x}_1 = (1, 1; -0, 1)$ e $\mathbf{x}_2 = (0, 76; 0, 24)$. Scrivere la soluzione del problema di Markowitz con stessi titoli, ma con una soglia di rendimento atteso pari a $\bar{\mu} = 3,1\%$.

2. Considero tre titoli A_1, A_2, A_3 con i seguenti rendimenti incerti:

$$X_1 = \begin{cases} 0.3, & 1/4; \\ 0.35, & 1/2; \\ 0.5, & 1/8; \\ 0.55, & 1/8. \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} 0.35, & 1/2; \\ 0.38, & 1/8; \\ 0.40, & 1/16; \\ 0.65, & 5/16. \end{cases} \quad X_3 = \begin{cases} 0.40, & 1/3; \\ 0.42, & 1/6; \\ 0.43, & 1/16; \\ 0.48, & 7/16. \end{cases}$$

Supponiamo si possa vendere allo scoperto. Determinare come conviene allocare ottimamente il proprio capitale nelle seguenti situazioni:

- (a) si vuole investire la metà del proprio capitale su A_1 e garantirsi un rendimento del 40%;
 - (b) si vuole investire su A_1 il doppio che su A_3 e garantirsi un rendimento del 45%.
 - (c) si cerchi il portafoglio ottimo secondo Markowitz, ad una soglia di rendimento atteso del 45%, supponendo che i tre titoli siano scorrelati.
3. Si costruiscano i portafogli ottimi secondo Markowitz composti da A_1 e A_2 , da A_1 e A_3 e da A_2 e A_3 ad una soglia di rendimento atteso del 40%.

4. Supponiamo che X_1 sia scorrelato con X_2 e X_3 , ma X_2 e X_3 abbiano un coefficiente di correlazione pari a 0,2.

Si risolva il problema di Markowitz ad un livello di soglia di rendimento atteso pari a $\bar{\mu} = 0,04$.

5. Si consideri il portafoglio ottenuto nell'esercizio precedente. Si stabilisca come allocare ottimalmente le proprie risorse tra esso e il seguente rendimento incerto:

$$X_4 = \begin{cases} 2\% & p = 0.1 \\ 5\% & p = 0.25 \\ 10\% & p = 0.65, \end{cases}$$

6. Valutare tutti i portafogli ottenuti nei punti precedenti secondo i seguenti metodi:

- (a) criterio media-varianza;
- (b) criterio del valore atteso;
- (c) criterio della utilità attesa, con

$$u_1(x) = \log(x/4); \quad u_2(x) = 2(1 - \exp(-x)); \quad u_3(x) = \sqrt[4]{x};$$

- (d) le curve di indifferenza generate dalle funzioni di utilità precedenti.

7. Date le funzioni di utilità u_1, u_2, u_3 , dimostrare che sono associate ad individui avversi al rischio usando il confronto tra equivalente certo e valore atteso con i portafogli degli esercizi precedenti.