

Università degli Studi di Macerata, Facoltà di Economia

A.A. 2012-13

Elementi di Calcolo delle Probabilità

Teoria Matematica del Portafoglio Finanziario

DOCENTE: ROY CERQUETI

Foglio di esercizi 5 - CATENE DI MARKOV

Considero le catene di Markov rappresentate dalle seguenti matrici di transizione. Esse sono a due o tre stati, e gli spazi degli stati sono $S = \{a, b\}$ e $S = \{c, d, e\}$:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 & 4/7 \\ 1/2 & 1/8 & 3/8 \\ 9/10 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_5 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_6 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Rappresentare le catene con un grafo.
2. Calcolare $P(X_2 = a | X_0 = b)$ (per le catene a due stati) e $P(X_2 = d | X_0 = e)$ (per le catene a tre stati).
3. Calcolare $P(X_3 = b | X_0 = b)$ (per le catene a due stati) e $P(X_3 = c | X_0 = e)$ (per le catene a tre stati).
4. Calcolare $P(X_3 \neq a | X_0 = b)$ (per le catene a due stati) e $P(X_3 \neq c | X_0 = e)$ (per le catene a tre stati).
5. Calcolare le probabilità stabilizzate delle catene.

6. Calcolare $P(T_a^{(b)} = 3)$ (per le catene a due stati) e $P(T_d^{(e)} = 2)$ (per le catene a tre stati).

7. Supponiamo di aver definito le probabilità iniziali della catena come segue:

- catene a due stati:

$$P(X_0 = a) = 1/3; \quad P(X_0 = b) = 1/3;$$

- catene a tre stati:

$$P(X_0 = c) = 1/6; \quad P(X_0 = d) = 1/6 \quad P(X_0 = e) = 2/3.$$

Calcolare $P(X_3 = b \mid X_1 \neq b)$ (per le catene a due stati) e $P(X_3 = c \mid X_2 \neq e)$ (per le catene a tre stati).