

Matematica Generale II (corso serale)
Esercizi proposti - VETTORI e MATRICI

Vettori

1. Si rappresentino i vettori $\underline{x} = (1, 2)$ e $\underline{y} = (-1, 2)$ sul piano $\mathbb{R}^2$ quindi se ne rappresenti la somma. Si rappresenti inoltre l'insieme dei vettori $\underline{z} = \alpha \underline{y}$, con $\alpha > 0$.
2. Sia $\underline{x} = (1, 2, 3)$, si individui un vettore $\underline{y}$ ortogonale ad $\underline{x}$.
3. Dati $\underline{x} = (k, k)$ e $\underline{y} = (h, k)$ si determinino $h, k \in \mathbb{R}$ tali che i due vettori siano ortonormali. Darne un'interpretazione grafica.
4. Dati i vettori $\underline{x} = (2, a)$ e $\underline{y} = (-1, a)$ si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che i due vettori siano fra loro ortogonali. Sia $\underline{z} = 3\underline{x} - 2(\underline{x} + \underline{y})$, si determini $a \in \mathbb{R}$ tale che $||\underline{z}|| = 1$.
5. Dati i vettori $\underline{x} = (4, 2)$ e $\underline{y} = (-2, 1)$, si esprima, se possibile, il vettore $\underline{z} = (-3, 0)$ come combinazione lineare di $\underline{x}$ e $\underline{y}$.
6. Si dica se i seguenti vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$: $\underline{x} = (-1, 2, 0)$, $\underline{y} = (0, -1, 1)$. Si dica inoltre se i vettori $\underline{v} = (5, -10, 0)$, $\underline{z} = (5, -10, 1)$ possono scriversi come loro combinazione lineare ed in caso affermativo si determinino i coefficienti di tale combinazione.
7. Dati i vettori $\underline{x} = (1, -2, 3)$, $\underline{y} = (1, 1, 2)$, $\underline{z} = (3, -2, -2)$ si dimostri che sono linearmente indipendenti quindi si esprima il vettore $\underline{v} = (0, -2, -9)$ come loro combinazione lineare.

8. Si verifichi che i seguenti vettori sono linearmente dipendenti:
 $\underline{x} = (0, -1, 10), \underline{y} = (10, 5, 0), \underline{z} = (20, 10, 0)$. Si esprima uno di essi come combinazione lineare dei restanti.
9. Si esprima il vettore $\underline{x} = (-1, 0, 3, 2)$ come combinazione lineare dei vettori della base canonica.
10. Determinare per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\underline{z} = (t, 0, 2)$ è combinazione lineare dei vettori $\underline{x} = (2, -1, 0)$ e $\underline{z} = (1, -1, 2)$.
11. Dati i vettori $\underline{x} = (1, -2, 3), \underline{y} = (0, 3, 1), \underline{z} = (1, -2, -1), \underline{v} = (1, 1, 1)$, si dica se essi sono linearmente dipendenti.

Operazioni fra matrici

1. Siano:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

si determini la matrice X tale che $2(A + B) = X + C$.

$$\left[X = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -9 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

2. Si determinino $x, y \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & x+y & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & x \\ 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[x = -11, y = 22]$$

Trasformazioni lineari

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f(\underline{x}) = (x_1 + x_2 + 1, x_3^2)$, si dica se essa è lineare.
2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $f(\underline{x}) = (x_1 + x_2, x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3)$, si dica se essa è lineare. In caso affermativo si determini la matrice di rappresentazione e si calcoli $f(2, 1, 0, -1)$.
3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lineare tale che $f(2, 1) = (4, 5)$. Si determini f e la matrice di rappresentazione.
4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $f(\underline{e}_1) = (2, 5)$, $f(\underline{e}_2) = (-1, 0)$, $f(\underline{e}_3) = (3, 1)$, si determini f .

Determinante

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ -5 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 11 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[|A| = -11, |B| = -181, |C| = -60, |D| = -126]$$

2. Determinare per quali valori dei parametri i determinanti delle seguenti matrici risultano nulli.

$$A = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ x^2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ 1 & b & 2b \\ 1 & c & 2c \end{pmatrix}$$

$$[x = \{0, -1, 2\}; x = 4 \vee x = 7; \forall a, b, c]$$

3. Date le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

risolvere le equazioni $|A - \lambda I| = 0$ e $|B - \alpha I| = 0$ con $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

$$[\lambda = \{1, 5, 7\}, \alpha = 1]$$

4. Risolvere la seguente disequazione:

$$\begin{vmatrix} k & k-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -k \end{vmatrix} > 0$$

$$[k \neq 1]$$

Matrice inversa e Rango

1. Si determini la matrice inversa di:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si determini $k \in \mathbb{R}$ tale che le seguenti matrici siano invertibili:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k^2 + k & 2k + 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & -2k \\ 6 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

3. Si determini il rango delle seguenti matrici al variare del parametro:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -k & k \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} k & -2k & k \\ 6 & 0 & k \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$$