

Matematica Generale II (corso serale)
Esercizi di ricapitolazione

1. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

si determini i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione $A\underline{x} = \alpha\underline{x}$ ammette soluzioni diverse da quella nulla ed in corrispondenza di tali valori si risolva la precedente equazione. [$\alpha = 4 \Rightarrow (x, -x), \alpha = 2 \Rightarrow (x, x)$]

2. Siano

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & -2 \\ -1 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{b} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- si discuta al variare di k il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ [$k = -1 \Rightarrow \text{imp.}, k = -4 \Rightarrow \exists! \text{sol.}, k \neq \{-4, -1\} \Rightarrow \text{imp.}$]
- si determini per quali valori di k il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ha soluzione non nulla [$k = -1$]
- per $k = -1$ si risolvano i sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ e $A\underline{x} = \underline{0}$.

3. Dati i seguenti vettori

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- si determini se esistono valori di k per i quali $\underline{z}$ possa esprimersi come combinazione lineare di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ quindi calcolare tale combinazione. [Per $k = 3 \Rightarrow \underline{z} = -2\underline{x} + \underline{y}$]

4. Sia $\underline{y} = f(\underline{x})$ un'applicazione lineare tale che:

$$f(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\underline{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinare la terza componente del vettore $f(\underline{x})$ in corrispondenza di $\underline{x} = (21, 0, 11)$. [-10]

5. Dati i seguenti vettori

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -2 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}$$

- si determini se esistono valori di λ tali che $\underline{z}$ sia combinazione lineare di $\underline{v}$, $\underline{w}$ e $\underline{x}$. [$\lambda = 0 \Rightarrow \underline{z} = -\underline{v} + \underline{w} + 0\underline{x}$]

- si determini per quali valori di λ i vettori dati costituiscono una base di $\mathbb{R}^4$. [$\lambda \neq 0$]

6. Si dica al variare del parametro $b \in \mathbb{R}$ quanti fra i seguenti vettori risultano linearmente indipendenti.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$[b = -1 \Rightarrow 3; b \neq -1 \Rightarrow 4]$$

7. Dato il sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2a^2 \\ 1 & a+1 & -9 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{b}$$

- si determinino, se esistono, i valori di a per i quali il sistema ammette soluzione $\forall \underline{b}$. [$a \neq -3$]

- per $a = -3$ si determini almeno un $\underline{b} \neq 0$ per cui il sistema ammette soluzioni;

- per $a = -3$ e $\underline{b} = 0$ si determinino le soluzioni del sistema.