

Esercizi proposti - FUNZIONI DI 2 VARIABILI

Matematica Generale II (corso serale)

Limiti

1. Verificare in base a definizione i seguenti limiti:

(a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} 2y - 2 \arctan |x - 1| = 4$

(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} 4x^2 + y = 1$

(c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} y - |\ln |x + 1|| = 1$

(d) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{2}{xy^2} + 1 = 1$

(e) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} x^2 + 2y^2 = \infty$

(f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{|y|} = \infty$

2. Verificare che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{\frac{y^2}{x^2}}, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y}$$

Curve di livello

1. Tracciare le curve di livello delle seguenti funzioni:

(a) $z = x^2 - y^2$

(b) $z = x^2 + y^2 + x$

(c) $z = y + \ln \frac{1}{x}$

(d) $z = y(x - 1)$

Derivate parziali

1. Verificare in base a definizione la derivabilità parziale della funzione $f(x, y) = |x + 1|\sqrt[3]{y}$ nel punto $P = (-1, 0)$
2. Si scriva l'equazione del piano tangente alla funzione $z = \arctan(x^3 - y)$ nel punto $P = (1, 0)$
3. Si scriva il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine della funzione $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 - 1}$ con punto iniziale $P = (0, 1)$
4. Calcolare le derivate parziali prime e seconde di $z = \sin(x^2 + y^2)$ nel punto $P = (0, 0)$
5. Calcolare il differenziale primo e secondo di $z = \sqrt{xy} - \ln(x/y)$ nel punto $P_0 = (-1, -1)$

Forme quadratiche

1. Si studi la definizione della seguente forma quadratica

$$q(\underline{x}) = x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$$

2. Si studi la definizione della seguente forma quadratica al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$q(\underline{x}) = k^2x_1^2 + (k + 1)x_2^2 + 12x_1x_2$$

3. Si studi la definizione della seguente forma quadratica

$$q(\underline{x}) = -x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$$

Massimi e minimi liberi

1. Si determinino i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

(a) $z = \frac{\sqrt{x-y^2-1}}{\sqrt{-2x-y+10}} + \ln\left(-\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} + 2\right)$

(b) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - y^2 - 4)(-y^2 - x - 1)}$

(c) $z = \ln(2x^2 + 2y^2 + 6x - 2y + 3)(e^x x - yx)$

(d) $z = \frac{\ln\left(\frac{-x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + 1\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$

(e) $z = \sqrt{(-x^2 + y^2 - 4) \ln(x^2 + y^2)}$

(f) $f(x, y) = \ln\left(\arctan\left(-2x^2 + \frac{y^2}{2} - 2\right)\right) \sqrt{x^3 + xy^2 + 2x^2}$

(g) $z = \frac{\arccos(x+y)}{\sqrt{y-x^2+1}}$

(h) $z = \sqrt{\frac{(x-y-1)(-x^2-y^2+8y)}{y-e^{-x}}}$

2. Si determinino i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

(a) $z = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

(b) $z = x + y^2 + \ln(x + y)$

(c) $f(x, y) = 2x + y^2 - \ln(x + 2y)$

(d) $z = x_1^2 - x_1 x_2^2$

(e) $z = 3x^2 - 6xy + y^2 + y^4$

(f) $f(x, y) = \ln(1 - (x - 2)^2) - y^2$

(g) $z = \ln(-2x^2y - 4x^2 - y^2 - 2y)$

Massimi e minimi Vincolati

1. Si determinino i punti di massimo e minimo vincolati delle seguenti funzioni:

(a) $z = y^2 - 6y + 3x - 4$ t.c. $y^2 - x + 2 = 0$

(b) $f(x, y) = 2x - y$ t.c. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (anche per via grafica)

(c) $z = xy$ t.c. $x + 4y = 16$ (anche per via grafica)

- (d) $z = x_1^2 x_2$ t.c. $2x_1^2 + x_2^2 = 3$ (anche per via grafica)
- (e) $z = x^2 + y$ t.c. $x^2 + y^2 - 9 = 0$ (anche per via grafica)
- (f) $f(x, y) = \frac{x}{y^2+1}$ t.c. $x^2 + y^2 - 3 = 0$ (solo per via grafica)

Massimi e minimi assoluti

1. Si determinino i punti di massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme A :

- (a) $z = \frac{4}{3}x^3 + y^2 - 4x$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$
- (b) $z = x^2 + y^2 - 2x$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$