

Funzioni IMPLICITE

Data l'equazione $f(x, y) = 0$

- **Esiste** $y = y(x)$ tale che $f(x, y(x)) = 0$?
- Se esiste, $y = y(x)$ **è unica**?

$$3y + 2x^2 - x + 1 = 0$$



$$\exists! y(x) : 3y(x) + 2x^2 - x + 1 = 0$$

ed è

$$y(x) = \frac{1}{3}(-2x^2 + x - 1)$$

ESISTENZA ED UNICITA'

$$y^2 + x^2 - 4 = 0$$



$$\exists y_1(x) \text{ e } y_2(x):$$

$$y_1^2(x) + x^2 - 4 = 0 \text{ e } y_2^2(x) + x^2 - 4 = 0$$

e sono

$$y_1(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{ e } y_2(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

ESISTENZA

$$3y^2 + x^2 + 1 = 0$$



~~$\exists$~~ $y(x) :$

$$3y^2(x) + x^2 + 1 = 0$$

NON ESISTENZA

Nel caso di sola **ESISTENZA**

$$y^2 + x^2 - 4 = 0$$

si ottiene **l'unicità** aggiungendo
un'altra condizione

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - 4 = 0 \\ y(0) = 2 \end{aligned} \Rightarrow \exists! y(x) \text{ con } y(x) = \sqrt{4 - x^2} :$$

$$x^2 + y^2(x) - 4 = 0 \text{ e } y(0) = 2$$

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - 4 = 0 \\ y(0) = -2 \end{aligned} \Rightarrow \exists! y(x) \text{ con } y(x) = -\sqrt{4 - x^2} :$$

$$x^2 + y^2(x) - 4 = 0 \text{ e } y(0) = -2$$

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 0$$

$$y : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} - \forall x \in D, (x, y(x)) \in A \\ - \forall x \in D, f(x, y(x)) = 0 \end{array}$$

si chiama

**FUNZIONE IMPLICITA definita
dall'equazione $f(x, y) = 0$**

NB: A volte la funzione implicita

$y(x):f(x,y(x))=0$ esiste ma non si riesce a darle la forma esplicita

Per es. le funzioni definite dalle equazioni

$$y^8 - y - x^2 = 0 \quad \text{e} \quad y + x - \sin y = 0$$

**NON SI ESPRIMONO PER MEZZO DI
FUNZIONI ELEMENTARI**

Sotto quali condizioni l'equazione

$$\mathbf{f(x, y(x))=0}$$

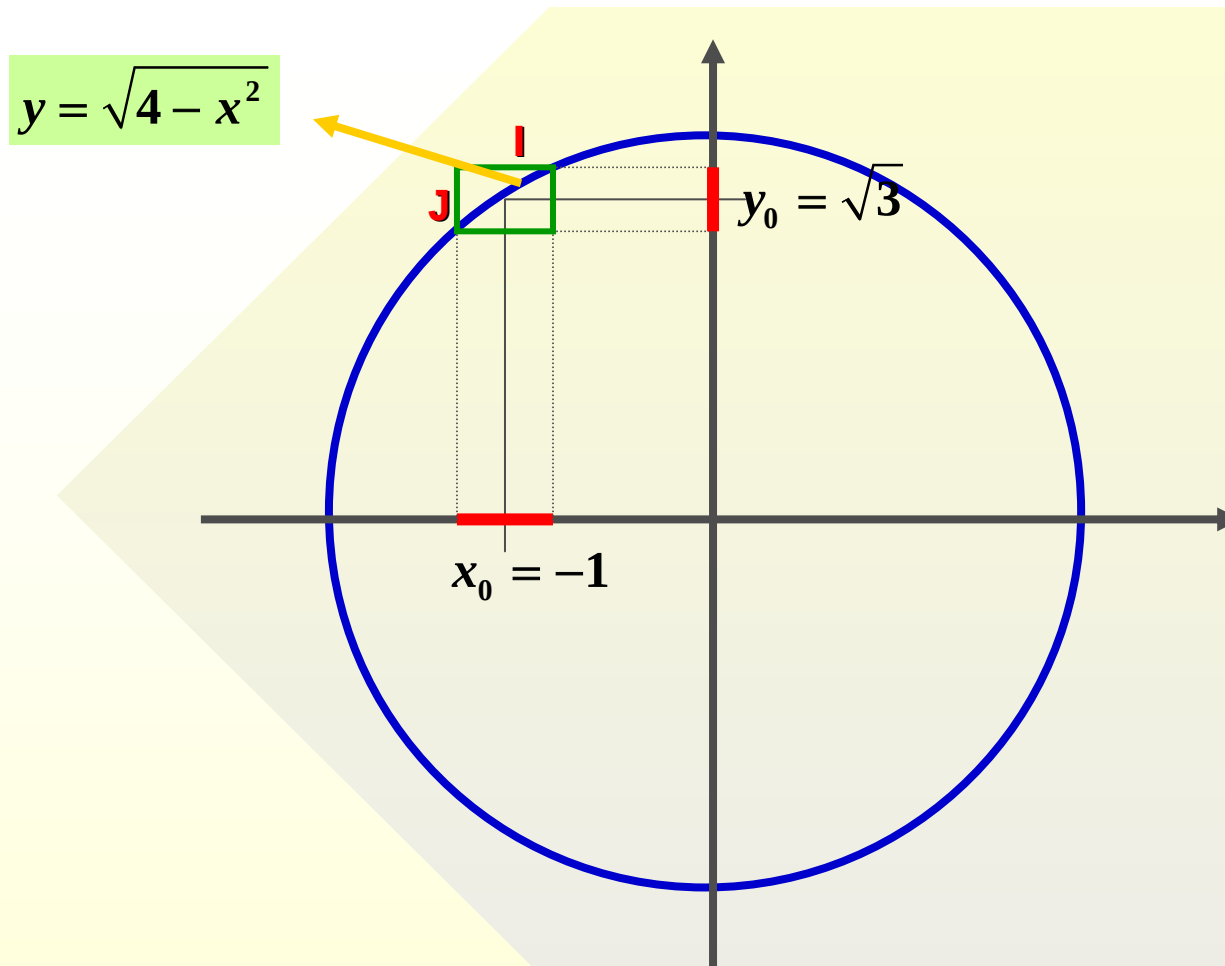
**definisce una funzione
implicita?**

TEOREMA DI DINI

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0) \in A$$

$$\text{Se} \left\{ \begin{array}{l} f(x_0, y_0) = 0 \\ f, f_x, f_y \text{ continue in } A \\ f_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{array} \right.$$

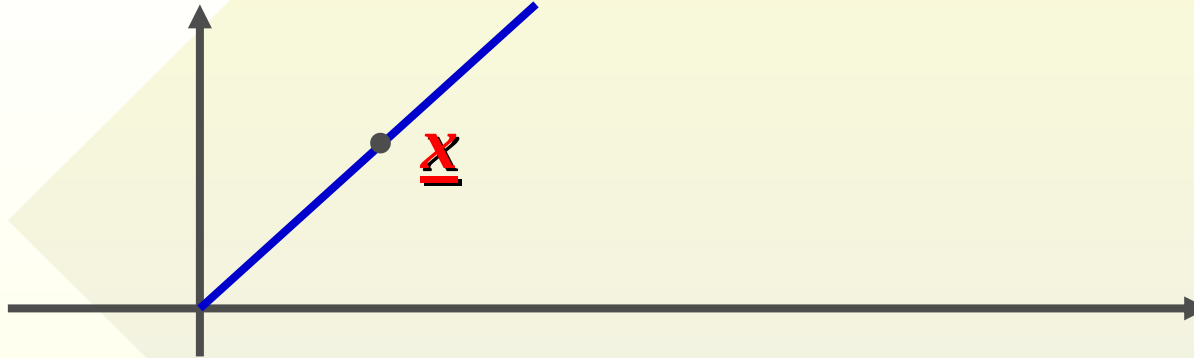
$$\text{Allora} \left\{ \begin{array}{l} -\exists \text{ un intorno } I \text{ di } x_0 \text{ e un intorno } J \text{ di } y_0 : \\ \quad I \times J \subseteq A \text{ ed } \exists! y : I \rightarrow J : \\ \quad y_0 = y(x_0) \text{ e } f(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in I \\ -y(x) \text{ è derivabile } \forall x \in I \\ \quad \text{e } y'(x) = \frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))} \end{array} \right.$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Forme quadratiche

$A \subseteq \mathbb{R}^n$: se $\underline{x} \in A$ anche $t\underline{x} \in A \quad \forall t > 0$



Se $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

f si dice OMOGENEA di grado α

NB: Se f è omogenea di grado 0 $\Rightarrow$

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\Rightarrow$ f è costante sulle semirette uscenti dall'origine

Si chiamano **FORME QUADRATICHE** i
polinomi omogenei di grado 2 nelle
variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$

Es:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2$$

NB:

$$q(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \text{se} \quad x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Definizioni

- $q(\underline{x})$ definita positiva se $\forall \underline{x} \neq 0 \quad q(\underline{x}) > 0$
 (negativa) se $(\forall \underline{x} \neq 0 \quad q(\underline{x}) < 0)$
- $q(\underline{x})$ semidefinita positiva se
 $q(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall \underline{x}$ ed $\exists \underline{x} \neq 0 : q(\underline{x}) = 0$
 (negativa) se
 $(q(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \text{ ed } \exists \underline{x} \neq 0 : q(\underline{x}) = 0)$
- $q(\underline{x})$ indefinita se
 $\exists \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \exists \underline{y} \in \mathbb{R}^n : q(\underline{x}) > 0 \text{ e } q(\underline{y}) < 0$

Si chiama **MATRICE ASSOCIATA** alla forma quadratica $q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, la matrice avente **sulla diagonale principale** coefficienti di $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ e al **posto (i, j) e (j, i)** il coefficiente del termine $x_i x_j$ moltiplicato per $1/2$

Esempio:

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Un **minore di ordine k** costituito dagli **elementi comuni a k righe e k colonne** aventi gli stessi indici, si chiama **minore principale di ordine k**

Se in particolare si ha un **minore principale** ottenuto dalle **prime k righe e dalle prime k colonne**, esso si chiama **minore principale di guida** (o minore principale di nord-ovest)

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ Minore del secondo ordine (prime due righe, seconde due colonne)

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ Minore principale del secondo ordine (terza e quarta riga, terza e quarta colonna)

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ Minore principale di guida del terzo ordine (prime tre righe, prime tre colonne)

Data la forma quadratica $q(\underline{x})$, sia A la matrice ad essa associata

- **$q(\underline{x})$ definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di guida di A sono >0**
- **$q(\underline{x})$ definita negativa $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di guida di ordine pari sono >0 mentre tutti quelli di ordine dispari sono <0**
- **$q(\underline{x})$ semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di guida di A sono ≥ 0**
- **$q(\underline{x})$ definita negativa $\Leftrightarrow$ tutti i minori principali di guida di ordine pari sono ≥ 0 mentre tutti quelli di ordine dispari sono ≤ 0**

Esempio: $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |1| = 1 > 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

Minore principale di guida dispari > 0

Minore principale di guida pari < 0

Non sono soddisfatte le condizioni precedenti



$q(x_1, x_2)$ è indefinita

Infatti, per es., $q(-1, 1) = -2 < 0$ e $q(1, 1) = 6 > 0$

Esempio: $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|1| = 1 > 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Tutti i minori principali sono ≥ 0



$q(x_1, x_2)$ è semidefinita positiva

Infatti $q(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$

ed è $=0$ per $x_1 = x_2$ e >0 altrove