

Matematica Generale I:

Scheda Esercizi Seconda Parte

Serena Brianzoni

1 Derivabilità

Calcolare il rapporto incrementale della funzione $y = x + \ln x$ relativo al punto $x_0 = 1$ e ad un incremento $h = e - 1$. (Livello 1)

Calcolare la derivata della funzione $y = \frac{1}{x+1}$ nel punto $x = 0$ applicando la definizione. (Livello 1)

Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili (Livello 1):

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$, [non diff. in 0, p.to angoloso]

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ 4x & x > 1 \end{cases}$, [non cont. in 1]

1.1 Punti di non derivabilità

Tracciare il grafico delle seguenti funzioni ed individuare eventuali punti di non derivabilità. (Livello 1)

a) $y = |x^3 - 1|$

b) $y = \sqrt{|x - 1|} + 2$

c) $y = \sqrt[3]{x + 1}$

Si dica se le seguenti funzioni sono derivabili nei punti indicati ed in caso negativo stabilire di che tipo di non derivabilità si tratta. (Livello 1)

1. $y = |x| - e^x$ in $x = 0$, [p.to angoloso]

2. $y = x + |\ln(x - 1)|$ in $x = 2$, [p.to angoloso]

3. $y = \sqrt[7]{x^4}$ in $x = 0$, [p.to di cuspidè]
4. $y = \sqrt[7]{x^3}$ in $x = 0$, [p.to di flex a tg verticale]

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Disegnare il grafico di f in un intorno del punto $x_0 \in D$ tale che (Livello 2):

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2$
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty$
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty$
- d) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$

1.2 Calcolo di derivate

Calcolare, utilizzando le regole di derivazione, la derivata prima delle seguenti funzioni (Livello 1):

1. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $[2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}]$
2. $y = \frac{x-1}{x+3}$, $[\frac{4}{(x+3)^2}]$
3. $y = \ln(x^2 - 2)$, $[\frac{2x}{x^2-2}]$
4. $y = e^{x^2-1}$, $[2xe^{x^2-1}]$
5. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$, $[\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}]$
6. $y = \ln(x + e^x)$, $[\frac{1+e^x}{x+e^x}]$
7. $y = \sin 2x$, $[2 \cos 2x]$
8. $f(x) = \frac{\ln x - 1}{2x}$, $[\frac{2 - \ln x}{2x^2}]$
9. $y = \frac{e^x - 1}{x}$, $[\frac{1 + e^x(x-1)}{x^2}]$
10. $y = (\ln x)^{3x-2}$, $[(\ln x)^{3x-2}(3 \ln \ln x + \frac{3x-2}{x \ln x})]$

1.3 Retta tangente

Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = \ln x + 1$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$. (Livello 1) [$y = x$]

Determinare, se esiste, l'equazione della retta tangente alla funzione $y = |\ln x|$ nel punto di ordinata $y_0 = 0$. (Livello 2)

Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = x^3 - 2ax^2 + 6a$ nel punto di ascissa $x = 2$ e determinare il valore del parametro a in modo tale che questa passi per il punto $P = (0, -2)$. (Livello 2) [$a = 1$]

Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $y = \sqrt{\frac{x+1}{2x}}$ nel punto di ascissa $x = 2$. (Livello 1) [$y = -\frac{\sqrt{3}}{24}x + \frac{7\sqrt{3}}{12}$]

Determinare i punti in cui la tangente alla curva $y = \frac{x+2}{x}$ ha coefficiente angolare pari a -2 . (Livello 2) $[(1, 3); (-1, -1)]$

Determinare in quale punto $P = (x_0, y_0)$ la retta tangente alla funzione $f(x) = \ln^2(x^2)$ è parallela alla retta di equazione $y = 1$. (Livello 2) [$P_1 = (1, 0); P_2 = (-1, 0)$]

Determinare per quale valore di $\lambda \in \mathbb{R}$ la parabola $y = -2x^2 + \lambda x + 1$ ammette tangente perpendicolare alla retta di equazione $y = -x$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$. (Livello 2) [$\lambda = 1$].

Si determini per quali valori dei parametri reali a e b la seguente funzione è continua e differenziabile. (Livello 1)

$$f(x) = \begin{cases} b(2x+1) + a & x \leq 0 \\ e^{-ax} & x > 0 \end{cases}$$

[$a = 2, b = -1$]

1.4 Asintoti

Determinare gli eventuali asintoti posseduti dalle seguenti funzioni. (Livello 1)

1. $y = x^2 - \ln x$
2. $f(x) = \frac{x^3}{x^2+x-2}$ [as. vert.: $x = 1$ e $x = -2$; as. obl.: $y = x - 1$]
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ [as. obl.: $y = x$]

1.5 Derivata seconda

Delle seguenti funzioni studiare: crescita, decrescenza, max e min (assoluti e relativi), convessità concavità e flessi. (Livello 1)

1. $y = \frac{x^3+1}{x}$ [p.to di min rel: $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; p.to di flex: $x_2 = -1$]
2. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \in [-1, 0] \\ x^3 - x^2 & x \in (0, 1] \end{cases}$ [-1 min rel. e ass., $2/3$ min. rel., 0 e 1 max rel. e ass.]
3. $y = x^3 + 2x$, [sempre cresc.]
4. $f(x) = \frac{1}{x+2}$, [decr. per $x \neq -2$]
5. $y = \sqrt{2x - x^2}$ [$x_0 = 1$ p.to di max ass.; $x_1 = 2$ e $x_2 = 0$ p.ti di min ass.]
6. $y = x \ln x$ [$x = 1/e$ p.to di min ass.]
7. $f(x) = e^x + e^{-x}$, [$x = 0$ p.to di min ass.]
8. $y = x^2 e^x$, [min in $x = 0$, max in $x = -2$]
9. $y = \frac{1}{1+x^2}$, [max in $x = 0$]

Si calcolino le derivate seconde delle seguenti funzioni (Livello 1):

1. $f(x) = x^2 \ln x$, [$3 + 2 \ln x$]
2. $y = \frac{x+1}{x+3}$, [$\frac{-4}{(x+3)^3}$]
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$, [$\frac{-1}{\sqrt{(x^2+x)^3}}$]
4. $y = 1 - e^{1-x^2}$, [$2e^{1-x^2}(1 - 2x^2)$]

Si determinino i punti di flesso posseduti dalle seguenti funzioni (Livello 1):

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, [$\pm\sqrt{3}/3$]
2. $y = \frac{x^3+8}{x}$, [-2]
3. $f(x) = \ln x + 2x^2$, [$1/2$]

1.6 Teoremi

Si calcolino i seguenti limiti applicando la regola di de l'Hopital (Livello 1):

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}, [+\infty]$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x, [0]$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}, [0]$
4. $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}, [e]$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}, [+\infty]$

Si dica se le seguenti funzioni verificano le ipotesi del Teorema del valor medio di Lagrange nell'intervallo I e, in caso affermativo, provare la tesi. (Livello 1)

1. $f(x) = e^{|x|}, I = [-1, 1]$
2. $y = \frac{x+1}{x-1}, I = [-2, 0]$
3. $y = x^3 - x, I = [0, 2]. [c = +2/\sqrt{3}]$
4. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}, I = [1, 2]. [c = 35/27]$

Si dica se la funzione $f(x) = x^2 - 2x$ verifica le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 2]$ ed in caso affermativo si determini il punto che soddisfa l'uguaglianza garantita dal Teorema. (Livello 1) $[c = 1]$

Si verifichino le ipotesi del T. di Rolle per la funzione $y = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}x^2} + x$ nell'intervallo $[0, 4]$. (Livello 1) $[c = 2]$

2 Grafico di funzione

Si tracci il grafico delle seguenti funzioni (Livello 1):

1. $y = \frac{x(x^2-1)}{x^2-4}$
2. $y = |x-5| - \frac{2}{x}$

$$3. y = \sqrt{1+x^2} + 2x$$

$$4. y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$$

$$5. y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

$$6. y = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$$

$$7. y = \sqrt{|x^2-4|}$$

$$8. y = e^{\frac{1}{x}}$$

$$9. y = e^{x^3-x} + 2$$

$$10. y = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$11. y = x^3e^{-x^2}$$

$$12. y = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$13. y = \ln(x^2 + x + 1)$$

$$14. y = -4\frac{\ln(x+2)}{(x+2)}$$

Si dica per quali valori di $k \in \mathfrak{R}$ l'equazione $x \ln x = k$ ha soluzioni.
(Livello 1) (Indicazione: si studi il grafico di $y = x \ln x$ quindi ...)

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = (x-1)^2e^{x-1}$. Si dica se esiste un intervallo nel quale si applicano le ipotesi del Teorema di Rolle.
(Livello 1)

Si tracci il grafico della funzione $y = (4x+2)\ln(4x+2)$. Si desuma inoltre il grafico di $g(x) = |f(x)|$, individuando eventuali punti di non derivabilità. (Livello 1)

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ individuando eventuali asintoti obliqui. Dire se la funzione è dotata di massimo e minimo assoluti. (Livello 1)

Dopo aver tracciato il grafico della funzione $y = \begin{cases} (x^2 + 2x)e^x & \text{se } x \neq 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$,

a) dire se essa presenta punti di discontinuità e di che tipo, e se possibile eliminarla, b) individuare, se esiste, il minimo della funzione. (Livello 1)

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = e^{x^2-x}$. Si desuma inoltre il grafico di $g(x) = f(|x|)$ individuando eventuali punti di non derivabilità. (Livello 1)

Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \ln \left(\frac{|x|+2}{|x|-1} \right)$. (Si studi il grafico di una opportuna funzione $g(x)$ quindi si giunga a quello di $f(x) = g(|x|)$). (Livello 1)

Si tracci il grafico della seguente funzione: $f(x) = (2x^2+3x)e^{-(x+1)}$, si deduca il grafico di $g(x) = |f(x)| + 1$, si dica se esiste un intervallo nel quale si applicano le ipotesi del Teorema di Rolle alla funzione $g(x)$. (Livello 1)

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = x + \sqrt[3]{1-x^3}$ poi dedurre quello della funzione $g(x) = |x| + \sqrt[3]{1-|x|^3} - 1$. (Livello 2)

Tracciare il grafico della funzione $f(x) = \frac{3 \ln x}{1-\ln x}$ e dire se questa presenta punti di discontinuità e di che tipo. (Livello 2)

Si tracci il grafico della funzione $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ e dire se essa presenta punti di discontinuità e di che tipo. (Livello 2)

3 Successioni

Si dica se le seguenti successioni sono convergenti, divergenti o indeterminate (Livello 1):

1. $a_n = (-1)^{2n} \frac{2n^2+1}{n^2-1}$
2. $a_n = (-1)^{n+1} 2n$
3. $a_n = n \sin n$
4. $a_n = (-3)^{2n+1}$
5. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+2}$
6. $a_n = (-2)^n$
7. $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{12n^2+1}$
8. $a_n = \frac{\sin n}{n}$

9. $a_n = \frac{n}{3n + \sin n}$

Verificare in base a definizione i seguenti limiti di successione (Livello1):

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0, \forall k \neq 0$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0, \forall k > 0$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} - 1 = +\infty$

4 Serie

Determinare il carattere delle seguenti serie e, se convergenti, calcolare la somma. (Livello1)

1. $\sum_{n=2}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^{3n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} 4(5)^{5n}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (e)^{-2n}$

Determinare il carattere delle seguenti serie. (Livello1)

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} e(n^{-e})$

Si determini la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$. (Livello1)

Stabilire se le seguenti serie sono convergenti. (Livello1)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-3}{n+1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n^2 + 1)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n+5} + 3$

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2(\sqrt[3]{x^n})$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ e, se convergente, determinare la somma. (Livello1)

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2-3)^n$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ e, se convergente, determinare la somma. (Livello1)

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{x^3+9}} \right)$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$. (Livello1)

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{e^{(x^2-1)}}$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$. (Livello1)

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n)^{\frac{x+3}{x-5}}$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$. (Livello1)

Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \ln^n |x-2|$ determinare il carattere $\forall x \in \mathbb{R}$ e ove converge calcolare la somma. (Livello 2)

Studiare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-x}{x^2-9} \right)^n$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$. (Livello 1)

Determinare il valore del parametro reale a tale che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a-2)^n}{3^{n-1}} = 4$. (Livello 1)

Risolvere la seguente equazione $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{2x-3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+4} \right)^{n+1}$ al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$. (Livello 1)